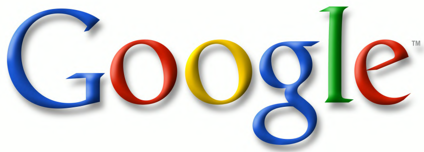
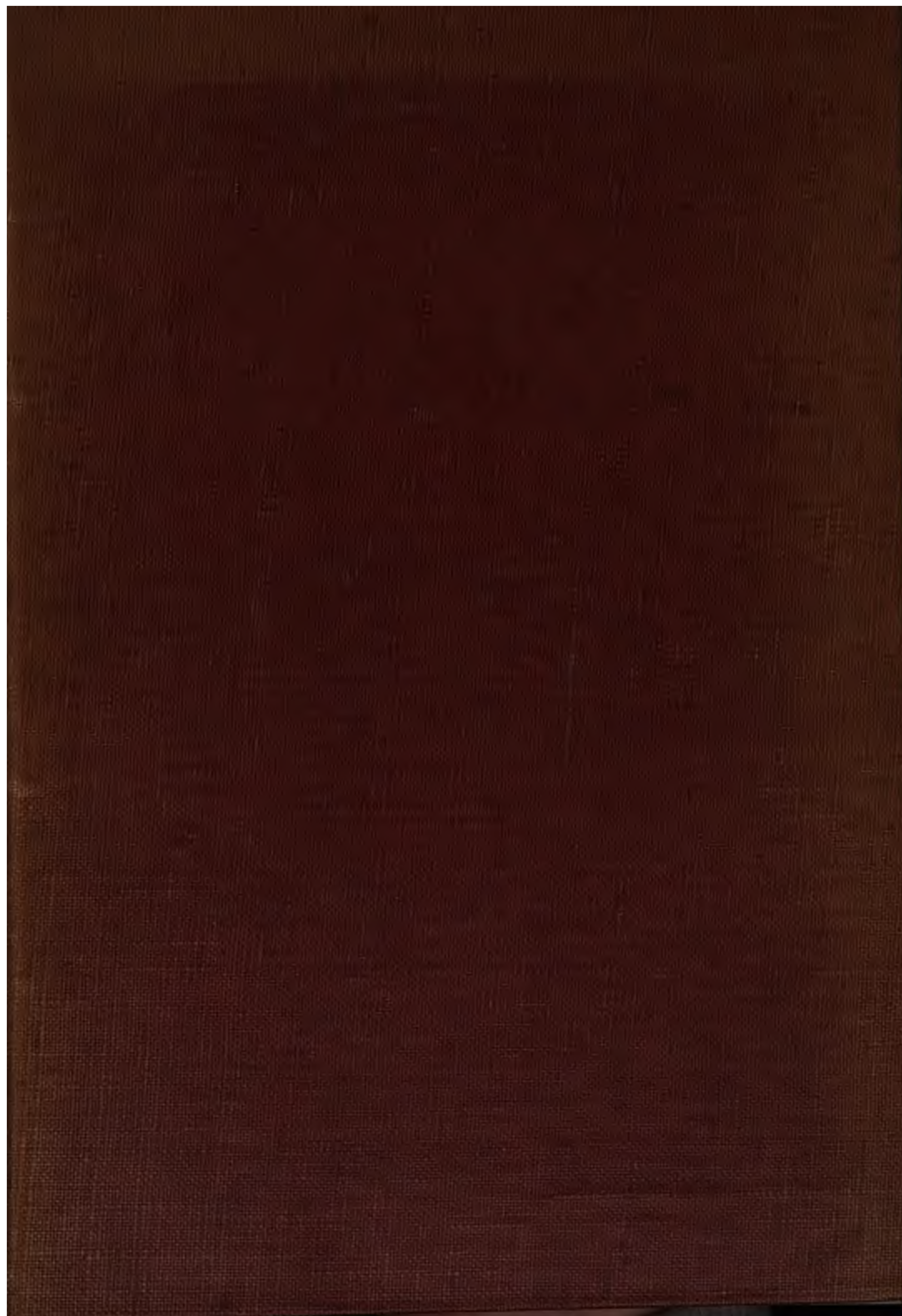
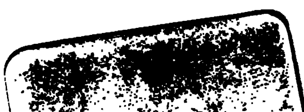






LA

# RÉFORME CARTÉSIENNE

ÉTENDUE AUX DIVERSES BRANCHES

DES

# MATHÉMATIQUES PURES

DU MÊME AUTEUR :

—

La *Chaleur solaire et ses Applications industrielles;* Paris, Gauthier-Villars, 1865.

---

Tours. — Imp. Rouillé-Ladevèze, rue Chaude, 6.

LA

# RÉFORME CARTÉSIENNE

ÉTENDUE AUX DIVERSES BRANCHES

DES

# MATHÉMATIQUES PURES

PAR

A. MOUCHOT



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, LIBRAIRE-ÉDITEUR

55, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1876



2

# PRÉFACE

Cet ouvrage est le développement d'un mémoire de mathématiques que M. Serret, membre de l'Institut, a bien voulu présenter à l'Académie des sciences le 17 juin 1865. La nécessité d'être bref m'avait forcé de n'indiquer, dans ce mémoire, que les résultats les plus saillants auxquels j'étais parvenu, sans m'étendre sur les vues théoriques qui m'y avaient conduit. Je viens aujourd'hui soumettre au jugement du public ces vues elles-mêmes, en les appuyant d'applications convenables.

Il est téméraire, je le sais, de rêver mieux que la doctrine des *Quantités complexes*, alors qu'elle jouit d'une faveur méritée, et qu'elle semble appelée encore à rendre d'utiles services. Mais on conviendra que cette doctrine ne peut ni servir à compléter le système de coordonnées de Descartes, ni fournir à la géomètrie supérieure les figures qui lui manquent.

D'un autre côté, que d'essais malheureux ont jusqu'ici discrédité ces deux problèmes et fait croire à l'impossibilité de les résoudre ! De toutes les voies à suivre pour atteindre la solution désirée, il n'en restait peut-être qu'une seule à explorer, mais elle avait été tracée par Descartes ; c'est celle que j'ai choisie. On jugera si, plus heureux que mes devanciers, je me suis suffisamment approché du but.

L'ouvrage qu'on va lire se compose de quatre parties. La première est un exposé succinct de la méthode algébrique de Descartes et des lacunes qu'elle devait inévitablement présenter à son début.

Dans la seconde partie, qui forme le résumé des principes d'arithmétique et d'algèbre, je ne donne comme étant de moi qu'une nouvelle définition des éléments réels ou imaginaires des figures et les conséquences qui en découlent. Pour tout le reste, je n'ai fait que recueillir des notions éparses dans nos meilleurs traités de mathématiques modernes. J'avouerai cependant que je me suis souvent inspiré, surtout pour les applications, de la lecture de nos vieux auteurs, particulièrement de la géométrie d'Henrion et de celle d'Arnauld de Port-Royal. A peine ai-je besoin d'ajouter que Descartes a toujours été mon guide le plus sûr : Descartes, dont la puissante influence dominera longtemps encore le mouvement scientifique qui nous emporte aujourd'hui.

S'il est une branche des mathématiques où le génie français n'ait guère eu jusqu'ici de concurrents, c'est assuré-

ment la *Géométrie supérieure* telle qu'elle est sortie des mains de Monge, de Carnot, de Poncelet et de quelques-unes de nos illustrations contemporaines. J'essaie, dans la troisième partie de mon ouvrage, d'analyser les travaux de ces éminents géomètres, de montrer ce qui restait à faire après eux, et de donner au principe de la *Corrélation des figures* une extension qu'il me semble comporter. Puisse cette tâche difficile ne pas avoir trop excédé mes forces !

L'ouvrage se termine par quelques applications de géométrie supérieure ou de géométrie analytique, applications très-simples et destinées, par cela même, à mieux faire juger de la méthode que je propose. Que cette méthode soit adoptée et les occasions ne manqueront pas à nos jeunes mathématiciens de l'étendre à des questions plus difficiles ou même de la perfectionner.

A. MOUCHOT.

*Tours,* 26 *juillet* 1876.

# RÉFORME CARTÉSIENNE

## PREMIÈRE PARTIE

### TRAVAUX DE DESCARTES.

**SOMMAIRE :** Descartes réformateur en mathématiques. — Défauts de l'analyse ancienne et de l'algèbre moderne. — Descartes effectue des opérations graphiques sur les droites, puis en traduit les résultats en nombres : de là, son algèbre. — Supériorité de sa méthode sur celle de Viète ou des Anciens. — La Géométrie de Descartes a pour but la résolution graphique des équations. — Nouvelle définition du produit des deux droites et conséquences. — Problèmes, plans et résolution de l'équation du 2ᵉ degré. — Problèmes solides et résolution de l'équation du 3ᵉ degré. — La réforme Cartésienne s'applique sans peine à l'arithmétique; jusqu'à présent elle n'a pu s'étendre d'une manière satisfaisante aux nombres négatifs non plus qu'aux expressions imaginaires. — Comment ces sortes de nombres s'introduisirent en algèbre. — La doctrine des quantités complexes en justifierait au besoin l'emploi; mais elle ne peut servir à compléter le système de coordonnées de Descartes, non plus qu'à doter la géométrie supérieure de figures qui la rattachent à l'analyse ancienne. — Nouvelle définition du point réel et du point imaginaire. — Droites de mode quelconque. — Opérations qu'elles comportent et conséquences qui en résultent, soit pour le calcul algébrique, soit pour la géométrie pure.

Descartes fut, en mathématiques, un réformateur plus profond qu'on ne le croit généralement. Les brillantes découvertes, dont il enrichit l'algèbre et la géométrie, sont trop connues pour qu'il soit nécessaire de les exposer ici ; mais ce qu'on n'a peut-être pas assez remarqué, c'est qu'il essaya le premier de fonder les règles du calcul algébrique sur la considération des droites et des opérations qu'elles comportent. Comment

conçut-il le dessein d'une pareille réforme ? il l'explique lui-même dans le *Discours de la Méthode.*

La pensée lui étant venue, vers la fin de ses études, de recueillir les préceptes les plus propres à guider sa raison, dans la recherche des vérités philosophiques, il dut passer en revue les sciences qui pouvaient lui fournir sous ce rapport d'utiles secours, et son attention se porta principalement sur la logique et les mathématiques. Mais appréciant bientôt à leur juste valeur ces deux branches des connaissances de son temps, il reconnut la nécessité de se frayer une voie nouvelle.

« J'avais un peu étudié, dit-il [1], étant plus jeune, entre les parties de « la philosophie, à la logique, et entre les mathématiques à l'analyse des « géomètres, et à l'algèbre, trois arts ou sciences qui semblaient devoir « contribuer quelque chose à mon dessein. Mais, en les examinant, je pris « garde que, pour la logique, ses syllogismes et la plupart de ses autres « instructions servent plutôt à expliquer à autrui les choses qu'on sait, « ou même, comme l'art de Lulle, à parler sans jugement de celles qu'on « ignore, qu'à les apprendre ; et bien qu'elle contienne, en effet, beau- « coup de préceptes très-vrais et très-bons, il y en a toutefois tant « d'autres mêlés parmi, qui sont nuisibles ou superflus, qu'il est presque « aussi malaisé de les en séparer, que de tirer une Diane ou une Minerve « hors d'un bloc de marbre qui n'est point encore ébauché. *Puis, pour « l'analyse des anciens et l'algèbre des modernes, outre qu'elles ne s'étendent « qu'à des matières fort abstraites, et qui ne semblent d'aucun usage, la « première est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne « peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination, et on s'est « tellement assujetti en la dernière à certaines règles et à certains chiffres « qu'on en a fait un art confus et obscur qui embarrasse l'esprit, au lieu d'une « science qui le cultive. Ce qui fut cause que je pensai qu'il fallait chercher « quelque autre méthode qui, comprenant les avantages de ces trois, fut « exempte de leurs défauts.* »

Descartes substitua, comme on sait, à la logique ancienne, quatre pré-

---

[1] *Discours de la Méthode*, Ed. Luzarche, page 33.

ceptes dont l'application plus ou moins parfaite, selon la nature des sciences qu'il étudie, constitue sa méthode. Celle-ci est d'ailleurs essentiellement déductive ; car, tout en prenant pour point de départ l'évidence, elle ne s'appuie jamais que sur l'observation d'un petit nombre de faits : encore ces faits ne semblent-ils être dans la pensée de l'auteur que les conséquences immédiates des vérités éternelles dont chacun de nous a conscience. Quoiqu'il en soit, la méthode cartésienne convient mieux aux sciences de raisonnement qu'à celles d'observation, les premières ne reposant que sur quelques données expérimentales fort simples, tandis que les autres doivent, avant tout, procéder par induction, et s'élever graduellement de l'étude attentive des phénomènes du monde matériel à la connaissance des lois qui le régissent. Il ne faut donc pas s'étonner que Descartes n'ait pas toujours appliqué ses principes avec un égal bonheur, et que sa physique, par exemple, malgré les éclairs de génie dont elle s'illumine souvent, soit parfois défectueuse, alors que sa *Géométrie* restera comme un des plus beaux monuments de l'esprit humain.

Ce dernier ouvrage étant le seul qui doive nous occuper ici, je ferai d'abord observer que le titre en pourrait être plus explicite. En effet, Descartes n'y traite pas uniquement de la géométrie pure, encore moins s'y propose-t-il, comme on l'a dit tant de fois, d'appliquer l'algèbre à cette science. Son principal but, au contraire, est, ainsi qu'on le verra bientôt, d'éclaircir à l'aide de la géométrie les obscurités de l'algèbre, et de rendre à celle-ci le caractère qu'elle n'eut jamais dû perdre, de simple écriture des propriétés de la grandeur. A la vérité, chemin faisant, il découvre une méthode géométrique féconde, dont l'éclat semble devoir effacer tout le reste et justifier jusqu'à un certain point le titre de l'ouvrage. Mais, pour peu qu'on y réfléchisse, on est forcé de reconnaître avec le marquis de Lhôpital, que cette méthode est avant tout pour Descartes, un moyen d'atteindre au couronnement de son œuvre, et d'arriver par une voie nouvelle, à la résolution des équations algébriques. En un mot, la géométrie cartésienne, en dépit de son titre, a principalement l'algèbre pour objet. Ozanam, qui donne à la suite de la géométrie de Boulenger un appendice renfermant la plupart des constructions de Descartes, l'intitule *Arithmétique par Géométrie*. Ce titre eût parfaitement caractérisé

l'œuvre du grand novateur, à la condition d'y substituer le mot d'algèbre à celui d'arithmétique.

C'est encore dans le *Discours de la Méthode* que Descartes nous fait connaître, sommairement, la route qu'il s'est tracée en mathématiques, et les résultats auxquels il est parvenu.

« Ces longues chaînes de raisons (1), toutes simples et faciles, dont les « géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles « démonstrations, m'avaient donné, dit-il, occasion de m'imaginer que « toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes « s'entresuivent en même façon, et que, pourvu seulement qu'on s'abs- « tienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde « toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y « en peut avoir de si éloignées, auxquelles enfin on ne parvienne, ni de « si cachées qu'on ne découvre. Et je ne fus pas beaucoup en peine de « chercher par lesquelles il était besoin de commencer, car je savais que « c'était par les plus simples et les plus aisées à connaître ; et considé- « rant qu'entre tous ceux qui ont ci-devant cherché la vérité dans les « sciences, il n'y a que les seuls mathématiciens qui ont pu trouver quel- « ques démonstrations, c'est-à-dire quelques raisons certaines et évi- « dentes, je ne doutais point que ce ne fut par les mêmes qu'ils ont exa- « minées ; bien que je n'en espérâsse aucune utilité, sinon qu'elles accou- « tumeraient mon esprit à se repaître de vérités et ne se contenter point « de fausses raisons. Mais je n'eus pas dessein pour cela de tâcher d'ap- « prendre toutes ces sciences particulières qu'on nomme communément « mathématiques ; et, voyant qu'encore que leurs objets sont différents, « elles ne laissent pas de s'accorder toutes, en ce qu'elles n'y considèrent « autre chose que les divers rapports ou proportions qui s'y trouvent, je « pensai qu'il valait mieux que j'examinâsse seulement ces proportions « en général, et sans les supposer que dans les sujets qui serviraient à « m'en rendre la connaissance plus aisée, même aussi sans les y astreindre « aucunement, afin de les pouvoir, d'autant mieux, appliquer après à tous

---

(1) *Discours de la Méthode*, page 36.

« les autres auxquels elles conduiraient. Puis, ayant pris garde que, pour « les connaître, j'aurais quelquefois besoin de les considérer chacune en « particulier, et quelquefois seulement de les retenir ou de les comprendre « plusieurs ensemble, je pensai que pour les considérer mieux en parti- « culier, je les devais supposer en des lignes, à cause que je ne trouvais « rien de plus simple, ni que je pusse plus distinctement représenter à « mon imagination et à mes sens; mais que, pour les retenir ou les com- « prendre plusieurs ensemble, il fallait que je les exprimâsse par quel- « ques chiffres les plus courts qu'il serait possible ; et que, par ce moyen, « j'emprunterais tout le meilleur de l'analyse géométrique et de l'algèbre, « et corrigerais tous les défauts de l'une par l'autre.

« Comme, en effet, j'ose dire que l'exacte observation de ce peu de « préceptes que j'avais choisis me donna telle facilité à démêler toutes « les questions auxquelles ces deux sciences s'étendent, qu'en deux ou « trois mois que j'employai à les examiner, ayant commencé par les plus « simples et les plus générales, et chaque vérité que je trouvais étant « une règle qui me servait après à en trouver d'autres, non-seulement « je vins à bout de plusieurs que j'avais jugées autrefois très-difficiles, « mais il me sembla aussi vers la fin que je pouvais déterminer en celles « mêmes que j'ignorais, par quels moyens et jusqu'où il était possible de « les résoudre.........

« Mais ce qui me contentait le plus de cette méthode était que, par « elle, j'étais assuré d'user en tout de ma raison, sinon parfaitement, au « moins le mieux qui fut en mon pouvoir, outre que je sentais en la « pratiquant que mon esprit s'accoutumait peu à peu à concevoir plus « nettement et plus distinctement les objets; et que ne l'ayant point « assujetti à aucune matière particulière, je me promettais de l'appli- « quer aussi utilement aux difficultés des autres sciences que j'avais fait « à celles de l'algèbre. »

Ce résumé rapide ne permet pas encore d'apprécier convenablement la réforme mathématique tentée par Descartes : à peine en fait-il pressentir toute l'importance. Il faut, pour juger de cette réforme en connaissance de cause, analyser la géométrie cartésienne et la comparer aux ouvrages antérieurs du même genre, particulièrement à ceux

de Viète. Si Descartes se fut contenté d'exprimer les grandeurs par des nombres ou des lettres et de soumettre immédiatement ces nombres ou ces lettres au calcul, sa méthode n'eût pas différé de celle de ses devanciers. Mais il sut au contraire rompre dès le début avec les anciennes traditions, se mit à effectuer sur les grandeurs les plus simples, sur les droites, toutes les opérations de l'arithmétique, et n'eût recours au symboles que pour exprimer les résultats de ces opérations ; en sorte que grâce à lui l'algèbre devint, jusque dans ses combinaisons les plus abstraites, comme la traduction des figures en nombres, et s'éclaira pour ainsi dire de l'évidence géométrique.

Il est juste de reconnaître toutefois que l'art d'exprimer graphiquement les formules algébriques et de construire les racines de certaines équations ne fut ignoré ni de Viète, ni surtout des mathématiciens Arabes. Mais, loin de faire servir la géométrie à démontrer les opérations de l'algèbre, ces précurseurs de Descartes ne voyaient pas même dans les résultats d'un calcul relatif aux droites l'expression de grandeurs homogènes. C'est ainsi que pour eux le degré d'une puissance en modifiait profondément la signification géométrique, et que la lettre $x$, par exemple, désignant une droite, $x^2$ représentait un carré, $x^3$ un cube, tandis que les puissances supérieures de cette même lettre ne répondaient plus à aucune grandeur connue. Une pareille manière de voir n'était évidemment pas de nature à permettre de subordonner l'algèbre à la géométrie : aussi Descartes commença-t-il par s'en affranchir. Il n'eut d'ailleurs, comme on le reconnaîtra bientôt, qu'à donner du produit d'une droite par une autre une définition plus rationnelle que celle des Anciens, pour voir les obscurités de l'algèbre s'évanouir une à une, et s'il ne parvint pas à déterminer géométriquement toutes les racines des équations numériques ou littérales, il montra du moins la route qui devait conduire plus tard à la résolution complète de ce problème.

Ce fut sans doute à cause de l'impossibilité plus apparente que réelle, mais inévitable à cette époque, d'expliquer toute l'algèbre par la géométrie et de faire remonter jusqu'à cette dernière science comme à leur véritable source, les racines imaginaires des équations que la méthode cartésienne fut abandonnée. Toutefois les mathématiciens n'eu-

rent garde d'étendre leur indifférence aux théories élevées qui en furent la suite. Mais s'ils accueillirent avec faveur ces nouvelles conquêtes de la science, ils n'en continuèrent pas moins de suivre les traces de Viète, en sorte que les constructions élémentaires de Descartes ne servirent plus qu'à l'interprétation des formules algébriques.

Ainsi détournées de leur signification primitive, ces constructions ne méritent pas d'autre intérêt que celui qu'on leur accorde habituellement. Mais apparaissent-elles, au contraire, comme les premiers jalons d'une route qui conduisit Descartes à ses plus belles découvertes, et qui même aujourd'hui peut encore ouvrir à la science de nouveaux horizons, leur importance ne saurait être dès lors contestée.

Le point de vue sous lequel j'essaie de présenter la géométrie cartésienne éveillera donc, je l'espère, l'attention des savants. C'est d'ailleurs celui qui paraît le plus naturel après un examen attentif de l'ouvrage. Je dirai mieux, c'est peut-être le seul qui se concilie d'une manière satisfaisante avec l'unité de plan du grand novateur, et qui permette de retrouver, dans la première application de sa méthode, la hardiesse et l'originalité de ses autres essais. Veut-on s'en assurer dès maintenant ? Il suffit de parcourir l'un quelconque des ouvrages de Descartes, le traité posthume *Du Monde et de la Lumière*, par exemple, et d'y comparer la marche de l'auteur à celle que je viens de signaler dans sa géométrie.

S'agit-il, en effet, de découvrir les lois du monde physique ? Descartes fuit en quelque sorte loin de la réalité pour assister à la création d'un nouvel Univers. Il se représente l'espace comme un tout rempli de particules juxtaposées, laissant place dans leurs intervalles à d'autres particules plus subtiles encore. Puis il constate l'inertie de la matière et la conservation du mouvement dans le monde, ou plutôt les déduit de l'immutabilité de Dieu ; part de là pour conclure à l'existence des tourbillons, s'élève par une synthèse hardie des mouvements des atômes à ceux des soleils et de leurs cortéges de planètes, et ne demande finalement à l'expérience que le soin de confirmer par des faits connus ou de nouvelles recherches l'exactitude de sa théorie.

Or, c'est précisément de la même façon que Descartes semble procé-

der en mathématiques. S'il commence, en effet, par des additions et soustractions linéaires, comme l'avait fait Viète, il se distingue presque aussitôt de celui-ci par la manière toute nouvelle dont il envisage le produit de deux droites et quitte dès lors les chemins battus pour n'appuyer l'algèbre que sur des considérations géométriques. La division, l'élévation aux puissances, l'extraction des racines s'effectuent, grâce à lui, par des constructions uniformes, aussi simples qu'élégantes. Puis, il en vient à comparer toute ligne plane convenablement définie à la ligne droite, exprime leur dépendance mutuelle par une relation numérique entre deux variables, et reconnaît enfin la possibilité de résoudre graphiquement les équations de degré quelconque, c'est-à-dire de surmonter une des plus grandes difficultés de l'algèbre. En un mot partant des données expérimentales les plus simples, il reconstruit pièce à pièce l'édifice des mathématiques pures, retrouve par une voie qui lui est propre tous les résultats connus de son temps, en accroît le nombre et montre la route à suivre pour en découvrir de nouveaux. Ainsi envisagée, la *Géométrie* de Descartes devient donc une application rigoureuse de sa méthode, sans qu'on puisse, à quelque autre point de vue qu'on se place, arriver à la même conclusion. C'est de plus une œuvre profondément originale, ou pour mieux dire, une véritable réforme opérée dans la science.

J'ajouterai que parmi les contemporains du grand novateur, ceux même qui cherchent à déprécier ses découvertes ne semblent pas s'être mépris sur l'indépendance de ses vues en mathématiques, tant ils se montrent scandalisés de l'indifférence qu'il affecte pour les écrits de ses devanciers. Roberval, entre autres, lui reproche de n'avoir pas lu Viète, et Descartes ne s'en défend guère; car il se contente de répondre à ce propos au père Mersenne [1]: « Pour l'accusation du Geostaticien, que je « ne donne rien des équations que Viète n'ait donné, *nego majorem;* car « comme je crois vous avoir déjà remarqué quelque autre fois, je com« mence en cela par où Viète avait fini. Et pour ce qu'il dit que je ne

---

(1) Lettre LXIX, tome III. Ed. Clerselier.

« suis pas excusable de n'avoir pas vu Viète, il aurait raison si j'avais « ignoré pour cela quelque chose qui fût dans Viète, ce que je ne crois « pas qu'il m'enseigne par ce beau livret qu'il en a autrefois fait impri- « mer. »

Dans une autre lettre au P. Mersenne, Descartes revient sur le même sujet d'une manière plus explicite [1] : « Et tant s'en faut, dit-il, que les « choses que j'ai écrites puissent être aisément tirées de Viète, qu'au con- « traire, ce qui est cause que mon traité est difficile à entendre, c'est que « j'ai tâché à n'y rien mettre que ce que j'ai cru n'avoir point été vu ni « par lui, ni par aucun autre ; comme on peut voir si on confère ce que « j'ai écrit du nombre des racines qui sont en chaque équation dans la « page 372, qui est l'endroit où je commence à donner les règles de mon « algèbre, avec ce que Viète en a écrit tout à la fin de son livre *de emen- « datione æquationum* ; car on verra que je le détermine généralement en « toutes équations, au lieu que lui n'en ayant donné que quelques exemples « particuliers, dont il fait toutefois si grand état qu'il a voulu conclure « son livre par là, il a montré qu'il ne le pouvait déterminer en géné- « ral; et ainsi j'ai commencé où il avait achevé; ce que j'ai fait toutefois « sans y penser : car j'ai plus feuilleté Viète depuis que j'ai reçu votre « dernière que je n'avais fait auparavant, l'ayant trouvé entre les mains « d'un de mes amis ; et entre nous je ne trouve pas qu'il en ait tant su « que je pensais nonobstant qu'il fut fort habile.

« Au reste, ayant déterminé comme j'ai fait en chaque genre de « questions tout ce qui s'y peut faire, et montré les moyens de le faire, « je prétends qu'on ne doit pas seulement croire que j'ai fait quelque « chose de plus que ceux qui m'ont précédé, mais aussi qu'on se doit « persuader que nos neveux ne trouveront jamais rien en cette matière « que je ne puisse avoir trouvé aussi bien qu'eux, si j'eusse voulu « prendre la peine de le chercher. Je vous prie que tout ceci demeure « entre nous : car j'aurais grande confusion que d'autres sussent que je « vous en ai tant écrit sur ce sujet. »

---

(1) Lettres LXXIII, tome III.

A part le sentiment d'orgueil qui perce dans ces dernières lignes et qu'atténue du reste le caractère confidentiel de sa lettre, Descartes avait, on le voit, parfaitement conscience de la supériorité de sa méthode en algèbre comme en géométrie. Remarquons aussi qu'il ne prend pas le mot d'algèbre dans son acception la plus générale, et qu'il entend désigner par là, non pas l'ensemble du calcul littéral, mais seulement la théorie des équations, théorie par laquelle il termine d'ailleurs son Traité, comme l'avait fait Viète.

Quant aux reproches de Roberval, Descartes ne pouvait guère y répondre d'une manière plus catégorique, n'alléguant au fond que l'excuse de son génie. « Les grands géomètres, observe judicieusement d'Alem- « bert (1), connaissent cette espèce de paresse, qui préfère la peine de « découvrir une vérité à la contrainte peu agréable de la suivre dans l'ou- « vrage d'autrui. En général, il se lisent peu les uns les autres, et peut- « être perdraient-ils à lire beaucoup : une tête pleine d'idées emprun- « tées n'a plus de place pour les siennes propres, et trop de lecture peut « étouffer le génie au lieu de l'aider. » S'il est un mathématicien à qui s'appliquent sans réserve ces réflexions d'un bon juge en pareille matière, c'est assurément Descartes.

La *Géométrie*, on le sait déjà, n'est à proprement parler qu'un recueil de vues nouvelles, il ne faut donc pas s'attendre à y trouver un ordre parfait, ni s'étonner que, dans l'analyse de l'ouvrage, on ne se conforme pas toujours à la marche de l'auteur. Un fait à noter encore, c'est qu'en plusieurs endroits du livre les explications sont insuffisantes ou manquent totalement : je me hâte d'ajouter que, de l'aveu même de Descartes, ces omissions sont volontaires. Notre philosophe connaissait trop bien les hommes, il était surtout trop docile aux conseils de la prudence, pour ne pas essayer de se mettre en garde contre les attaques des demi-savants. « Je puis assurer, écrit-il à de Beaune (2), que « je n'ai rien omis de tout cela qu'à dessein.... mais j'avais prévu que cer-

---

(1) Mélanges. — Art. Géométrie.

(2) Lettre LXXI, tome III.

« taines gens qui se vantent de savoir tout n'eussent pas manqué de dire « que je n'avais rien écrit qu'ils n'eussent su auparavant, si je me fusse « rendu assez intelligible pour eux, et je n'aurais pas eu le plaisir que j'ai « eu depuis de voir l'impertinence de leurs objections; outre que ce que « j'ai omis ne nuit à personne. Car, pour les autres, il leur sera plus pro- « fitable de tâcher à l'inventer d'eux-mêmes que de le trouver dans un li- « vre ; et pour moi, je ne crains pas que ceux qui s'y entendent m'impu- « tent aucune de ces omissions à ignorance; car j'ai partout eu soin de « mettre le plus difficile, et de laisser seulement le plus aisé. » Bien que Descartes parle spécialement ici de l'étude des courbes et de leurs propriétés, cet aveu doit s'étendre à toute sa géométrie, car il serait facile d'y signaler d'un bout à l'autre de nombreuses omissions.

Veut-on maintenant se faire une idée des notions élémentaires admises en mathématiques vers la fin du XVI[e] siècle, il suffira de l'extrait suivant de l'*Isagoge*. Viète après avoir supposé connues les règles de l'arithmétique jusqu'aux proportions inclusivement, s'exprime ainsi (¹) :

« La loi première et constante des égalités ou proportions s'appelle « loi des homogènes. La voici :

« Les homogènes se comparent aux homogènes.

« Quant aux grandeurs hétérogènes, on ne peut savoir, ainsi que le « disait Adraste, comment elles se comportent entre elles.

« C'est pourquoi :

« Si une grandeur s'ajoute à une grandeur, celle-ci est homogène à « l'autre.

« Si une grandeur est soustraite d'une grandeur, celle-ci est homogène « à l'autre.

« Si une grandeur est multipliée par une grandeur, celle qui en « résulte est hétérogène à l'une et à l'autre.

« Si une grandeur est divisée par une grandeur, celle-ci est hétéro- « gène à l'autre.

– Ed

« C'est faute d'avoir admis ces distinctions que les anciens analystes « sont pleins de confusion et d'obscurité.

« Les grandeurs jouissant de la propriété de s'élever ou de descendre « proportionnellement d'un genre à l'autre sont dites *scalaires*.

« Les grandeurs *scalaires* sont :

1° Le côté ou racine;

2° Le carré;

3° Le cube;

4° Le carré de carré..., etc.

Viète, donnant ensuite à l'algèbre le nom de *Logistique*, la distingue en *Logistique numérique et Logistique spécieuse*, suivant qu'elle traite des nombres ou des symboles représentant les grandeurs, tels que les lettres de l'alphabet. Les opérations fondamentales de la logistique sont d'ailleurs l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Mais si pour ne parler que des grandeurs les plus simples, la somme ou la différence de deux droites est encore une droite, leur produit est un rectangle; le produit de ce rectangle par une autre droite est un solide; et à partir de là les résultats du calcul cessent de s'interpréter géométriquement. Bref, la logistique spécieuse opère d'abord sur des lettres représentant des grandeurs de même nature, et finit par ne raisonner que sur des symboles dénués de toute espèce de signification concrète. Voyons s'il en est de même de la géométrie cartésienne.

Descartes, comme Viète, suppose connues toutes les règles de l'arithmétique et débute ainsi dans son immortel ouvrage :

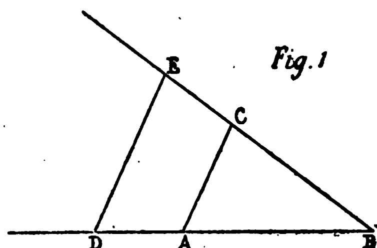
« Tous les problèmes de géométrie (1) se peuvent facilement réduire à « tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur « de quelques lignes droites pour les construire.

Comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie.

« Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq « opérations, qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la « division et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce « de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant

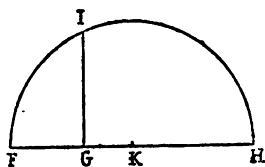
(1) Géométrie Ed. Rabuel.

« les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en « ajouter d'autres, ou en ôter ; ou bien en ayant une que je nommerai « l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut or- « dinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, « en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux, comme l'autre « est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication ; ou bien en trou- « ver un quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à « l'autre, ce qui est le même que la division ; ou enfin trouver une ou « deux ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque « autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cu- « bique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmé- « tique en la géométrie afin de me rendre plus intelligible.

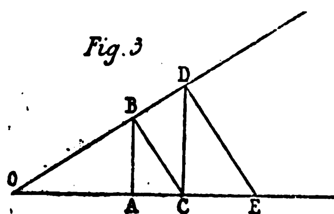



« Soit, par exemple, AB (*fig.* 1) « l'unité et qu'il faille multiplier BD « par BC, je n'ai qu'à joindre les « points A et C, puis tirer DE paral- « lèle à CA, et BE est le produit de « cette multiplication.

« Ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, « je tire AC parallèle à BE et BC est le produit de cette division.




« Ou bien, s'il faut tirer la racine carrée de « GH (*fig.* 2) je lui ajoute en ligne droite FG « qui est l'unité, et divisant FH en deux parties « au point K, du centre K je tire le cercle FIH, « puis élevant du point G une ligne droite « jusqu'à I à angles droits sur FH, c'est GI la « racine cherchée. Je ne dis rien ici de la cubique, ni des autres à cause « que j'en parlerai plus commodément ci-après. »




C'est au commencement du troisième livre de la géométrie que Descartes traite de la recherche des moyennes proportionnelles entre deux droites et en particulier de l'extraction des racines. Le principe de l'instrument qu'il propose

à cet effet est des plus simples : soit un triangle rectangle OAB dans lequel on ait OA = 1 ; si l'on élève alternativement sur les côtés de l'angle O les perpendiculaires BC, CD, DE,..... on reconnaît sans peine que OC est le carré, OD le cube, OE la quatrième puissance...... de OB, et que réciproquement OB est à la fois la racine carrée de OC, la racine cubique de OD, la racine quatrième de OE....., etc. Il suit de là que, pour élever une droite à une certaine puissance, ou pour en extraire une racine de degré quelconque, il suffit de construire la suite des triangles OAB, OBC, OCD, ODE,... la droite donnée étant l'hypoténuse du premier ou du dernier de ces triangles. L'instrument imaginé par Descartes permet de résoudre ce double problème; mais il est inutile de le décrire ici. Ce qu'il importe seulement de constater, c'est que la géométrie cartésienne effectue sur les droites, d'une manière uniforme, toutes les opérations de l'arithmétique, et que les résultats de ces opérations sont constamment des droites.

Immédiatement après le passage qu'on vient de lire, Descartes aborde la question des symboles algébriques :

Comment on peut user de chiffres en géométrie.

« Mais souvent, dit-il, on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes « sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune « par une seule. Comme pour ajouter la ligne BD à GH, je nomme l'une « $a$ et l'autre $b$, et écris $a + b$; et $a - b$ pour soustraire $b$ de $a$; et $ab$ « pour les multiplier l'une par l'autre; et $\frac{a}{b}$ pour diviser $a$ par $b$; et $aa$ « ou $a^2$ pour multiplier $a$ par soi-même; et $a^3$ pour le multiplier encore une « fois par $a$, et ainsi à l'infini; et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine carrée « de $a^2 + b^2$; et $\sqrt{C\, a^3 - b^3 + ab^2}$, pour tirer la racine cubique de « $a^3 - b^3 + ab^2$, et ainsi des autres.

« Où il est à remarquer que par $a^2$, ou $b^3$, ou semblables, je ne conçois « ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me « servir des noms usités, en l'algèbre je les nomme des carrés ou des « cubes, etc.

« Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne se « doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que « l'autre, lorsque l'unité n'est point déterminée en la question, comme

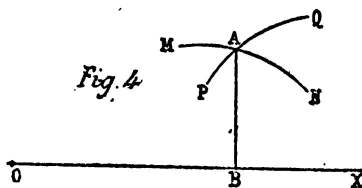
« ici $a^3$ en contient autant que $ab^2$ ou $b^3$ dont se compose la ligne que « j'ai nommée

$$\sqrt{C\, a^3 - b^3 + ab^2}$$

« mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause « qu'elle peut être sous-entendue partout où il y a trop, ou trop peu de « dimensions : comme s'il faut tirer la racine cubique de $a^2 b^2 - b$, il « faut penser que la quantité $a^2 b^2$ est divisée une fois par l'unité, et « que l'autre quantité $b$ est multipliée deux fois par la même. »

Ce passage n'a pas besoin de commentaire. Descartes y subordonne évidemment l'algèbre à la géométrie, puisqu'il ne voit dans les opérations littérales que l'écriture d'opérations analogues effectuées sur des droites. On ne saurait trop insister sur le mérite d'une pareille conception; mais ce n'est pas ici le lieu de montrer toute l'étendue des services qu'elle peut rendre, il suffit pour le moment d'indiquer les conséquences qu'en a su tirer Descartes.

Les résultats des opérations élémentaires effectuées sur des droites se traduisant par des monômes ou des polynômes algébriques, il est clair que si l'on parvient à l'aide de ces opérations à trouver deux expressions d'une même droite en fonction des données et des inconnues d'un problème, l'égalité de ces expressions constituera une équation algébrique, et que réciproquement toute équation algébrique sera généralement susceptible de représenter l'égalité de deux expressions d'une même droite.




Cela posé, soit MN une courbe quelconque. Pour la comparer à la droite OX située dans le même plan, il suffit de mener de tous ses points des parallèles à une direction donnée, et de chercher à exprimer l'une d'elles $AB = y$ en fonction de la distance $OB = x$ de son pied à un point fixe $o$, pris pour origine sur la droite. Si l'ordonnée $y$ peut se calculer à l'aide des opérations élémentaires en fonction de l'abscisse $x$, la courbe est algébrique comme l'équa-

tion à deux inconnues qui la représente. Et réciproquement toute équation algébrique $y = f(x)$ ou $f(x, y) = o$ est susceptible de s'interpréter en coordonnées rectilignes par une courbe plane parfaitement déterminée.

Mais lorsque deux courbes algébriques MN et PQ représentées par les équations $y = f(x)$, $y = F(x)$, se coupent en un point A (*fig.* 4), l'ordonnée $AB = y$ du point d'intersection peut s'exprimer de deux manières en fonction de l'abscisse correspondante $OB = x$, on a donc pour tous les points d'intersection des deux courbes l'équation algébrique $f(x) = F(x)$, et il en résulte immédiatement que la détermination des racines d'une équation algébrique à une seule inconnue revient à la recherche des points d'intersection de deux courbes convenablement choisies.

Telle est en résumé la doctrine mathématique de Descartes. S'il emprunte à l'analyse ancienne ses lieux géométriques, il demande à l'algèbre de les traduire en son langage ; et comme il fait ainsi dépendre leur intersection de la résolution d'un système d'équations numériques, il en conclut la possibilité d'effectuer géométriquement cette dernière opération. On en jugera mieux du reste par les extraits qui vont suivre.

Voici d'abord en quels termes notre auteur parle de la résolution des problèmes de géométrie et, en particulier, de la détermination des racines de l'équation du second degré à une inconnue.

**Comment il faut venir aux équations, qui servent à résoudre les problèmes.**

« Voulant, dit-il, résoudre quelque problème, on doit d'abord le con« sidérer comme étant déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes « qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui « sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence « entre les lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté « selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous, en quelle « sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres jusqu'à ce « qu'on ait trouvé un moyen d'exprimer une même quantité en deux « façons, ce qui se nomme une équation, car les termes de l'une de ces « deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant « de telles équations qu'on a supposé de lignes qui étaient inconnues. « Ou bien s'il ne s'en trouve pas tant, et que nonobstant on n'omette rien « de ce qui est désiré en la question, cela témoigne qu'elle n'est pas en-

« tièrement déterminée. Et lors on peut prendre à discrétion des lignes « connues, pour toutes les inconnues, auxquelles ne répond aucune « équation. Après cela, s'il en reste encore plusieurs, il se faut servir « par ordre de chacune des équations qui restent aussi, soit en la com- « parant avec les autres, pour expliquer chacune de ces lignes incon- « nues ; et faire ainsi en les démêlant, qu'il n'en demeure qu'une seule « égale à quelque autre qui soit connue, ou bien dont le carré ou le « cube, ou le carré de carré, ou le sursolide, ou le carré de cube, etc., « soit égal à ce qui se produit par l'addition ou soustraction de deux ou « plusieurs autres quantités, dont l'une soit connue, et les autres soient « composées de moyennes proportionnelles entre l'unité et ce carré ou « cube, ou carré de carré, etc., multipliées par d'autres connues. Ce que « j'écris en cette sorte $z = b$, ou $z^2 = - az + b^2$, ou $z^3 = az^2 + b^2z - c^3$, « ou $z^4 = az^3 + b^2z^2 - c^3z + d^4$, etc. C'est-à-dire $z$, que je prends « pour la quantité inconnue est égale à $b$, ou le carré de $z$ est égal au « carré de $b$ moins $a$ multiplié par $z$, ou le cube de $z$ est égal à $a$ mul- « tiplié par le carré de $z$, plus le carré de $b$ multiplié par $z$ moins le « cube de $c$. Et ainsi des autres.

« Et on peut toujours réduire ainsi toutes les quantités inconnues à « une seule ; lorsque le problème se peut construire par des cercles et « des lignes droites, ou aussi par des sections coniques, ou même par « quelque autre ligne, qui ne soit que d'un ou deux degrés plus compo- « sée. Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause « que je vous ôterais le plaisir de l'apprendre vous-même, et l'utilité de « cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à mon avis la princi- « pale qu'on puisse tirer de cette science.....

« C'est pourquoi je me contenterai ici de vous avertir, que pourvu « qu'en démêlant ces équations on ne manque point à se servir de toutes « les divisions, qui seront possibles, on aura infailliblement les plus « simples termes auxquels la question puisse être réduite.

« Et que si elle peut être résolue par la géométrie ordinaire, c'est-à- **Quels sont les problèmes plans ?** « dire, en ne se servant que de lignes droites et circulaires tracées sur « une superficie plate, lorsque la dernière équation aura été entière-

« ment démêlée, il n'y restera tout au plus qu'un carré inconnu égal à « ce qui se produit de l'addition ou soustraction de sa racine multi- « pliée par quelque quantité connue, et de quelque autre quantité aussi « connue.

Comment ils se résolvent.

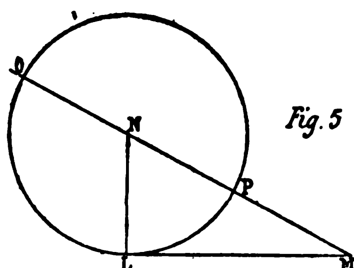


Fig. 5

« Et lors cette racine ou ligne in- « connue se trouve aisément. Car si « j'ai, par exemple, $z^2 = az + b^2$, je « fais (*fig.* 5) le triangle rectangle « NLM, dont le côté LM est égal à $b$, « racine carrée de la quantité connue « $b^2$, et l'autre LN est $\frac{1}{2}a$, la moitié « de l'autre quantité connue, qui était multipliée par $z$, que je suppose « être la ligne inconnue. Puis, prolongeant MN la base du triangle « jusqu'à $o$ en sorte que NO soit égal à NL, la toute OM est $z$ la ligne « cherchée. Et elle s'exprime en cette sorte : $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$.

« Que si j'ai $y^2 = -ay + b^2$, et que $y$ soit la quantité qu'il faut trouver, je fais le même triangle rectangle NLM, et de sa bare MN j'ôte NP égale à NL, et le reste PM est $y$ la racine cherchée. De façon que j'ai $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Et tout de même si j'avais $x^4 = -ax^2 + b^2$, P M serait $x^2$ et j'aurais $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}}$ et ainsi des autres.

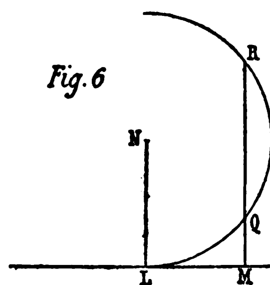


Fig. 6

« Enfin, si j'ai $z^2 = az - b^2$, je fais NL « (*fig.* 6) égale à $\frac{1}{2}a$ et LM égale à $b$ comme « devant, puis au lieu de joindre les points « M, N, je tire MQR parallèle à LN, et du « centre N par L ayant décrit un cercle, qui « la coupe aux points Q et R, la ligne cher- « chée $z$ est MQ, ou bien MR, car en ce cas « elle s'exprime en deux façons, à savoir :

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}, \text{ et } z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

« Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, « ne coupe ni ne touche la ligne droite MQR, il n'y a aucune racine en

« l'équation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problème « proposé est impossible.

« Au reste, ces mêmes racines se peuvent trouver par une infinité « d'autres moyens, et j'ai seulement voulu mettre ceux-ci comme fort « simples, afin de faire voir qu'on peut construire tous les problèmes de « la géométrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris « dans les quatre figures que j'ai expliquées. Ce que je ne crois pas que les « Anciens aient remarqué; car autrement ils n'eussent pas pris la peine « d'en écrire tant de gros livres, où le seul ordre de leurs propositions « nous fait connaître qu'ils n'ont point eu la vraie méthode pour les « trouver toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont « rencontrées. »

Il y a, comme on sait, deux manières de résoudre une équation de degré quelconque à une inconnue. L'une fondée sur les propriétés des nombres consiste à calculer les valeurs des racines, ou, dans certains cas, les formules qui les représentent : c'est la méthode algébrique. L'autre se borne à regarder ces mêmes racines comme des droites qu'on détermine par l'intersection de deux lignes planes, puis à faire voir que les propriétés de ces lignes mènent directement à l'équation proposée : c'est la méthode graphique. De ces deux méthodes la première a longtemps semblé la plus générale ; mais, ainsi que j'espère le prouver, la seconde ne lui cède en rien sous ce rapport. L'une et l'autre d'ailleurs, loin d'être incompatibles, sont de nature à se prêter un mutuel appui. Toutes deux doivent donc inspirer le même intérêt.

Peut-être Descartes est-il trop bref en ce qui concerne la résolution de l'équation du second degré ; car il faut un peu d'attention pour reconnaître : 1° qu'il détermine géométriquement les deux racines sans se préoccuper de leur expression analytique ; 2° qu'il conclut cette dernière de la construction même ; 3° qu'il trouve la preuve de son opération dans l'accord des résultats avec ceux que fournit l'algèbre. Mais la manière dont il traite les équations de degré supérieur ne laisse pas douter un instant que sa méthode de résolution ne soit la méthode graphique.

Il ne s'occupe, au reste, dans les constructions précédentes, que des racines positives ; tandis qu'en résolvant l'équation du troisième degré,

par exemple, il distingue avec soin les racines positives de celles qui sont négatives. Pourquoi ne procède-t-il pas de même à l'égard de l'équation $z^2 = az + b^2$ dont les racines sont de signes contraires? Je n'en vois pas d'autre raison que la suivante : la figure 5 est un type de construction mal choisi, car si la racine positive est MO, la racine négative ne saurait s'interpréter par MP, comme je le ferai voir à propos des attaques de Carnot contre la doctrine des quantités négatives. De là l'insuffisance de cette figure. Mais pour obtenir avec leur signe propre les racines de l'équation proposée, il suffit de prendre AB $= 2b$ (*fig.* 7) de lui mener en son milieu la perpendiculaire IO $= \frac{a}{2}$, et de décrire du point O comme centre avec OA pour rayon une circonférence coupant la direction de cette perpendiculaire aux points C et D. En effet les droites de sens contraires IC et ID sont bien les racines cherchées, puisqu'on a par construction

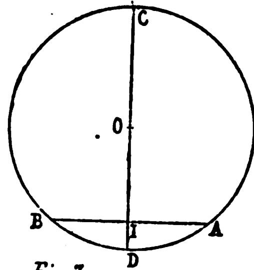


*Fig. 7*

$$\text{IC} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

$$\text{ID} = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

résultats qui s'accordent avec les formules algébriques.

Quant à la figure 6, elle est convenable en ce qu'elle se prête à la détermination des racines de l'équation correspondante, même quand ces racines sont imaginaires.

La fin du premier livre de la Géométrie est consacrée à la résolution du problème de Pappus. On y reconnaît la supériorité de la méthode de Descartes sur les méthodes anciennes dont ce problème fut l'écueil.

Le second livre a spécialement la géométrie pour objet : il traite de la nature des courbes, de leur comparaison avec la ligne droite, de leurs propriétés algébriques, de la résolution générale du problème de Pappus, enfin de la théorie des ovales, toutes matières qui, malgré leur importance, ne nous intéressent pas directement. Je passe donc au troisième livre.

Celui-ci n'a trait qu'à l'algèbre. Descartes s'y propose de construire les problèmes solides, sursolides..., etc., ou, en d'autres termes, de résoudre géométriquement les équations algébriques à partir du troisième degré ; mais comme il a besoin pour atteindre son but de préparer convenablement ces équations, il avertit qu'il va dire quelques mots de leur nature, de leurs propriétés ; puis il entre ainsi en matière :

« Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue « a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à- « dire de valeurs de cette quantité. Car, par exemple, si on suppose $x$ égal « à 2 ou bien $x - 2$ égal à rien ; et derechef $x = 3$, ou bien $x - 3 = o$ ; « en multipliant ces deux équations $x - 2 = o$ et $x - 3 = o$ l'une par « l'autre, on aura $x^2 - 5x + 6 = o$, ou bien $x^2 = 5x - 6$, qui est une « équation en laquelle la quantité $x$ vaut 2, et tout ensemble vaut 3. « Que si derechef on fait $x - 4 = o$, et qu'on multiplie cette somme par « $x^2 - 5x + 6 = o$, on aura $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = o$, qui est une « équation en laquelle $x$ ayant trois dimensions, a aussi trois valeurs « qui sont 2, 3 et 4.

« Mais souvent il arrive que quelques-unes de ces racines sont fausses, « ou moindres que rien. Comme si on suppose que $x$ désigne aussi le « défaut d'une quantité qui soit 5, on a $x + 5 = o$, qui étant multiplée par « $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = o$ fait $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = o$. « Pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois « vraies, qui sont 2, 3, 4, et une fausse qui est 5. »

Descartes s'occupe ensuite des transformations à faire subir aux équations algébriques pour en abaisser le degré, changer les signes des racines, faire disparaître le second terme, etc. Mais ces détails n'étant que secondaires dans la question qui nous occupe, je me borne à citer le passage où il parle des racines imaginaires.

« Au reste, dit-il, tant les vraies racines que les fausses, ne sont pas « toujours réelles ; mais quelquefois seulement imaginaires. C'est-à-dire « qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit, en chaque « équation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corres- « ponde à celles qu'on imagine. Comme encore qu'on en puisse imagi- « ner trois en celle-ci $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = o$, il n'y en a toutefois

« qu'une réelle, qui est 2, et pour les deux autres, quoiqu'on les aug-
« mente ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer,
« on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires. »

Ce passage et le précédent sont, il faut le reconnaître, en complet désaccord avec les vues qui semblent avoir guidé jusqu'à présent Descartes ; mais je ne m'y arrête pas en ce moment, parce que j'aurai plus tard l'occasion d'y revenir. Je passe également sous silence la réduction des équations du troisième et du quatrième degré, quand elles proviennent de questions pouvant se résoudre avec la règle et le compas, et je passe à la résolution générale de ces mêmes équations, ou, pour parler comme Descartes, à la construction des problèmes solides.

Façon générale pour construire tous les problèmes solides réduits à une équation de trois ou quatre dimensions.

« Or, quand on est assuré, dit le grand géomètre, que le problème
« proposé est solide, soit que l'équation par laquelle on le cherche monte
« au carré de carré, soit qu'elle ne monte que jusqu'au cube, on peut
« toujours en trouver les racines par l'une des trois sections coniques,
« laquelle que ce soit, ou même par quelque partie de l'une d'elles, tant
« petite qu'elle puisse être, en ne se servant au reste que de lignes
« droites et de cercles. Mais je me contenterai ici de donner une règle
« générale pour les trouver toutes par le moyen d'une parabole, à cause
« qu'elle est en quelque façon la plus simple.

Descartes prend d'abord l'équation du troisième degré sous la forme $z^3 = pz + q$, et celle du quatrième degré sous la forme $z^4 = pz^2 + qz + r$.

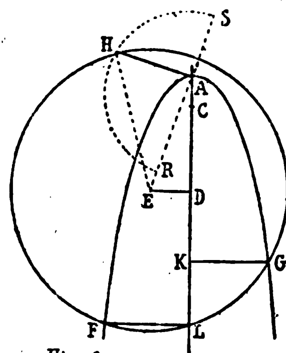


Fig. 8

« Après cela, dit-il, supposant que la
« parabole FAG (*fig.* 8) est déjà décrite,
« et que son essieu est ACDKL et que son
« côté droit est *a* ou 1 dont AC est la
« moitié, et enfin que le point C est au
« dedans de cette parabole, et que A en
« est le sommet; il faut faire $CD = \frac{1}{2} p$,
« et la prendre du même côté qu'est le
« point A au regard du point C, s'il y a
« $+ p$ en l'équation; mais s'il y a $- p$, il
« faut la prendre de l'autre côté. Et du point D, ou bien, si la quantité

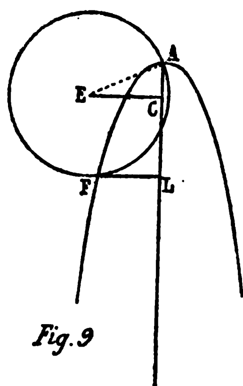


Fig. 9

« $p$ était nulle, du point C (*fig.* 9) il faut élever « une ligne à angles droits jusqu'à E, en sorte « qu'elle soit égale à $\frac{1}{2}\,q$. Et enfin du centre E « il faut décrire le cercle FG dont le demi-dia- « mètre soit AE, si l'équation n'est que cubique, « en sorte que la quantité $r$ soit nulle. Mais « quand il y a $+\,r$, il faut dans cette ligne AE « (*fig.* 8) prolongée prendre d'un côté AR égale « à $r$, et de l'autre AS égale au côté droit de la « parabole qui est 1 ; et ayant décrit un cercle « dont le diamètre soit RS, il faut faire AH perpendiculaire sur AE, la- « quelle AH rencontre ce cercle RHS au point H qui est celui par où « l'autre cercle FHG doit passer. Et quand il y a $-\,r$, il faut après avoir « ainsi trouvé la ligne AH (*fig.* 10) inscrire AI « qui lui soit égale, dans un autre cercle dont « AE soit le diamètre, et lors c'est par le point I « que doit passer FIG le premier cercle cherché. « Or, ce cercle FG peut couper la parabole en « un, ou deux, ou trois ou quatre points, desquels « tirant des perpendiculaires sur l'essieu, on a « toutes les racines de l'équation tant vraies que « fausses. A savoir si la quantité $q$ est marquée « du signe + les vraies racines seront celles de « ces perpendiculaires qui se trouveront du même « côté de la parabole que E le centre du cercle, comme FL ; et les autres, « comme GK (*fig.* 8) sont fausses. Mais au contraire, si cette quantité $q$ « est marquée du signe —, les vraies seront celles de l'autre côté, et les « fausses ou moindres que rien seront du côté où est E le centre du « cercle. Et enfin si ce cercle ne coupe ni ne touche la parabole en « aucun point, cela témoigne qu'il n'y a aucune racine ni vraie ni fausse « en l'équation, et qu'elles sont toutes imaginaires. En sorte que cette « règle est la plus générale et la plus accomplie qu'il soit possible de « souhaiter. »

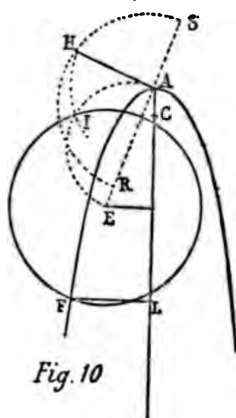


Fig. 10

Descartes justifie ensuite ses constructions en démontrant que, dans

tous les cas possibles, elles conduisent à l'équation proposée. Puis, il montre que tous les problèmes solides peuvent se ramener soit à la recherche de deux moyennes proportionnelles entre deux droites, soit à la trisection de l'angle. Enfin il résout graphiquement les équations du cinquième et du sixième degré. Comme il serait trop long de le suivre dans tous ces développements, je me borne à rappeler la conclusion de l'ouvrage.

« Mon dessein, dit le grand géomètre en terminant, n'est pas de faire « un gros livre, et je tâche plutôt de comprendre beaucoup en peu de « mots, comme on jugera peut-être que j'ai fait, si on considère qu'ayant « réduit à une même construction tous les problèmes d'un même genre, « j'ai tout ensemble donné la façon de les réduire à une infinité d'autres « diverses, et ainsi de résoudre chacun d'eux en une infinité de façons. « Puis outre cela qu'ayant construit tous ceux qui sont plans en coupant « d'un cercle une ligne droite, et tous ceux qui sont solides en coupant « aussi d'un cercle une parabole, et enfin tous ceux qui sont d'un degré « plus composé en coupant tout de même d'un cercle une ligne qui n'est « que d'un degré plus composée que la parabole, il ne faut que suivre la « même voie pour construire tous ceux qui sont plus composés à l'infini : « car en matière de progressions mathématiques lorsqu'on a les deux « ou trois premiers termes, il n'est pas malaisé de trouver les autres. « Et j'espère que nos neveux me sauront gré non-seulement des choses « que j'ai ici expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontaire- « ment, afin de leur laisser le plaisir de les inventer. »

Descartes, on le voit, finit par accuser nettement le but de sa géométrie, et ce but est à n'en pas douter, la résolution des équations algébriques. Peut-être me saura-t-on gré de citer encore ici le jugement d'un de nos plus illustres mathématiciens sur Descartes et son œuvre.

« Ce grand homme (1), dit le marquis de l'Hôpital, poussé par son gé- « nie et la supériorité qu'il se sentait, quitta les Anciens pour ne suivre « que cette même raison que les Anciens avaient suivie ; et cette heu-

(1) Préface (attribuée à Fontenelle) de l'*Analyse des Infiniment Petits.*

« reuse hardiesse qui fut traitée de révolte, nous valut une infinité de « vues nouvelles et utiles sur la physique et sur la géométrie. Alors on « ouvrit les yeux et l'on s'avisa de penser. Pour ne parler que des ma- « thématiques, Descartes commença où les Anciens avaient fini, et il « débuta par la solution d'un problème où Pappus dit qu'ils étaient tous « demeurés. On sait jusqu'où il a porté l'analyse et la géométrie, et « combien l'alliage qu'il en a fait rend facile la solution d'une infinité « de problèmes qui paraissaient impénétrables avant lui. Mais comme « il s'appliquait principalement à la résolution des égalités, il ne fit « d'attention aux courbes qu'autant qu'elles lui pouvaient servir à en « trouver les racines : de sorte que l'analyse ordinaire lui suffisant pour « cela, il ne s'avisa point d'en chercher d'autres. »

Après avoir essayé de mettre en relief tout ce que la géométrie cartésienne renferme de vues neuves et fécondes, il me reste à parler des imperfections que deux siècles de progrès devaient nécessairement accuser dans cette œuvre de génie.

En général, lorsqu'on traite par le calcul un problème de géométrie à une inconnue, par exemple, on représente cette inconnue, ainsi que les données par des lettres ordinaires ; puis on écrit en langue algébrique l'énoncé du problème, et il ne reste plus qu'à résoudre l'équation résultante. Mais pour que cette équation demeure applicable à la géométrie, il faut généralement que les valeurs des données ne dépassent pas certaines limites. Dès qu'on néglige de tenir compte d'une pareille restriction, l'inconnue cesse d'être un nombre, et l'on quitte un terrain solide pour ne plus raisonner que sur de purs symboles.

S'agit-il, par exemple, de résoudre la question suivante :

Trouver la droite qu'il faut additionner à une autre droite pour en obtenir une troisième ?

On représente la longueur de la droite inconnue par $x$, celle des droites données par $a$ et $b$, et l'on traduit algébriquement l'énoncé du problème, ce qui conduit à l'équation $x + a = b$, qu'il suffit de résoudre pour obtenir la solution demandée.

Or en procédant de la sorte, on suppose expressément $a$ moindre que $b$. Tant que les lettres $a$ et $b$ varient conformément à cette hypothèse, les

valeurs de $x$ sont des nombres et s'interprètent par des droites. Mais, à ne considérer que des droites absolues, dès qu'on suppose $a$ plus grand que $b$, le problème devient impossible, et l'équation proposée cesse d'être applicable à la géométrie. Cependant l'algèbre, répugnant à restreindre la signification de ses lettres, adopte aussi bien la seconde hypothèse que la première. Elle persiste donc a voir une identité numérique dans l'équation $x + a = b$, quelque soient les valeurs des constantes. Aussi lors qu'appliquant à cette équation les procédés habituels, on vient à la résoudre dans l'hypothèse $a > b$, ne trouve-t-on plus pour $x$ qu'un symbole dénué de sens. Les symboles de ce genre s'appellent *nombres négatifs*, parce qu'il suffit, pour les former, d'affecter du signe — les nombres absolus; et ces derniers combinés au signe + prennent par opposition le nom de *nombres positifs*.

Les nombres positifs et négatifs ne sont d'ailleurs pas les seuls qu'on soit obligé d'introduire en algèbre.

Veut-on, par exemple, résoudre cet autre problème.

Trouver deux droites dont la somme soit $a$ et la moyenne proportionnelle $b$.

L'équation $x^2 - ax + b^2 = o$ à laquelle on parvient alors, a pour racines les longueurs des droites cherchées. Mais ces racines ne sont des nombres qu'autant que $b$ est au plus égal à $\frac{1}{2}\,a$. Dans tout autre hypothèse, elles se réduisent à de purs symboles, auxquels on donne le nom *d'expressions imaginaires*, afin de les distinguer des nombres positifs et négatifs qui s'appellent collectivement *nombres réels*.

Ainsi, l'algèbre ne laisse pas que d'abandonner souvent le domaine des grandeurs pour s'engager dans les voies sans issue d'un symbolisme de pure convention. Mais, cette manière de procéder est-elle rigoureuse? Et lorsqu'on généralise une formule de géométrie en dehors du problème qui l'a donnée, s'est-on bien assuré d'avance que les propriétés de l'étendue ne se prêtaient pas à l'extension mutuelle de ce problème et de son écriture algébrique. Il est, je crois, permis désormais d'affirmer le contraire. Car on verra bientôt que, pour ramener à un même type une foule de problèmes fort différents en apparence et généraliser aussi bien que par les conventions algébriques la formule trouvée pour l'un

d'eux, il suffit de substituer aux grandeurs géométriques absolues telles que les droites, les arcs, les angles, ......... d'autres grandeurs de même espèce, pouvant offrir deux sens ou deux modes opposés, puis d'exprimer ces nouvelles grandeurs par des nombres affectés de signes arbitraires, ou mieux par les symboles mêmes de l'algèbre. Il est vrai que de toutes les branches des mathématiques, la géométrie est peut-être la seule capable d'associer aux grandeurs réelles des grandeurs imaginaires de même espèce. Mais, qu'importe ? L'essentiel est qu'à chaque symbole algébrique elle sache opposer une de ses conceptions, puisqu'il en résultera nécessairement, un moyen de pousser la réforme cartésienne jusqu'à ses dernières conséquences. En effet, indépendamment de ce que le principe de la corrélation des figures recevra par là même une extension considérable, si les nombres réels ou imaginaires n'interviennent dans le calcul que comme expressions de grandeurs définies *à priori*, rien n'empêchera de faire servir les opérations dont ces grandeurs seront susceptibles à démontrer celles qu'on effectuera sur les nombres eux-mêmes. De plus, les formules algébriques, prises dans toute leur généralité, n'étant alors que l'écriture des propriétés de l'étendue, les racines des équations déduites de ces formules en y supposant toutes les lettres constantes, à l'exception d'une seule, ne cesseront évidemment jamais d'avoir une signification géométrique parfaitement déterminée. De là, par conséquent, la possibilité d'affranchir l'algèbre des règles conventionnelles et des obscurités qui la déparent. Or, on a vu que tel était le projet de Descartes. J'ai donné de plus à entendre que ce projet n'avait été qu'en partie réalisé. Revenons donc sur nos pas afin de reconnaître où s'est arrêtée la réforme cartésienne et ce qui restait à faire pour la compléter.

Cette réforme, je l'ai dit, tendait surtout à ne voir dans les formules algébriques que l'écriture d'opérations effectuées sur des droites. Mais, comme je vais le prouver, elle laissait régner une grande incertitude sur l'origine des nombres négatifs et celle des expressions imaginaires. De plus, elle ne remontait pas jusqu'à l'arithmétique et semblait par là vouloir élever entre cette science et l'algèbre une barrière peu naturelle. En même temps que je signalerai ces imperfections j'essaierai

d'en assigner les causes aussi bien que le remède, heureux si j'arrive de la sorte, à dégager la belle conception de Descartes des ombres qui la voilaient encore.

En premier lieu, l'extension de la réforme cartésienne à l'arithmétique semblerait impliquer contradiction. Car, s'il est aussi simple que naturel de regarder les nombres entiers, fractionnaires ou incommensurables comme l'expression d'autant de droites, il ne paraît guère possible de placer les opérations sur les droites avant les opérations numériques correspondantes, puisque les premières supposent la connaissance des lignes proportionnelles. Mais, ainsi qu'on le reconnaîtra plus loin, c'est par leur définition seule et non par les constructions qu'elles exigent que les opérations relatives aux droites servent à légitimer celles dont les nombres sont susceptibles : en sorte que l'emploi des lignes proportionnelles devient alors superflu. Cela est si vrai, du reste, que l'algèbre elle-même s'explique tout entière sans le secours des constructions de Descartes. J'ajouterai que la considération des droites et des opérations qu'elles comportent n'est pas seulement de nature à éclaircir les règles du calcul des nombres absolus, mais qu'elle devient nécessaire quand il s'agit d'exposer avec rigueur la théorie des nombres incommensurables. S'il fallait apporter des preuves à l'appui de cette dernière assertion, je n'aurais qu'à citer nos meilleurs traités d'arithmétique où les opérations relatives aux nombres ne se définissent dans toute leur généralité qu'après celles qui concernent les grandeurs. Quant à Descartes, il laisse de côté ces questions élémentaires, tant il se hâte d'entrer au cœur de son sujet.

Aussi bien, qu'il y ait là de sa part oubli ou réticence, il n'y a certainement pas infraction à sa méthode. Mais on ne saurait plus en dire autant de la manière dont il envisage la question des nombres négatifs. C'est d'abord à peine, si, dans toute sa géométrie, il juge convenable de s'y arrêter un instant. « Souvent, remarque-t-il, à propos des « racines des équations, il arrive que quelques-unes de ces racines sont « fausses ou moindres que rien comme si $x$ désigne le défaut d'une quan- « tité qui soit 5, on a $x + 5 = o$.. » Et là se bornent les détails qu'il donne à ce sujet. Cependant la question n'est pas tellement simple qu'il

puisse la trancher ainsi d'un seul mot. De plus, cette apparition si peu motivée des nombres négatifs n'est-elle pas en désaccord avec sa méthode ? S'il faut voir, en effet, dans les lettres des symboles représentant les droites, et dans les expressions $a + b$, $a - b$,... l'écriture d'opérations effectuées sur ces grandeurs, que devons-nous entendre par les défauts des quantités, ou, en d'autres termes, par les nombres négatifs ? Sont-ils du domaine de l'arithmétique ? Évidemment non ; puisque celle-ci ne considérant que des nombres plus grands que zéro, n'effectue jamais de soustraction impossible. Est-ce de l'algèbre ou de la géométrie qu'ils tirent leur origine ? Loin de laisser subsister le moindre doute à cet égard, il serait bon de justifier jusqu'aux règles qu'on leur applique. Avant et depuis Descartes on ne les a vus se glisser en algèbre qu'à la faveur d'une convention portant sur des nombres ou des lettres et non sur des grandeurs ; les accepter sans autre explication n'est-ce pas, selon toute apparence, leur assigner tacitement une pareille origine ? Or, Descartes ne peut le faire sans encourir le reproche d'abdiquer sa méthode. On a souvent dit, à la vérité, qu'au lieu de rejeter comme inutiles les racines négatives des équations, il a su, le premier, les interpréter géométriquement. D'abord l'assertion n'est pas exacte : car, huit ans avant lui, d'après de Lalande (1), Albert Girard, dans un ouvrage ayant pour titre : *Invention nouvelle en Algèbre*, montre l'usage des racines négatives en géométrie par ces mots : « La solution par moins « s'explique en géométrie en rétrogradant, et le moins recule où le plus « avance ; » ce dont il donne un exemple sur un problème qui conduit à une équation du quatrième degré où deux racines sont positives et deux négatives. Mais en admettant même que Descartes ne suive pas ici d'autre inspiration que la sienne, on ne peut rien en conclure relativement à la question qui nous occupe. Celle-ci ne consiste pas, en effet, dans l'interprétation de $\pm a$, par exemple, par une droite additive ou soustractive. Il s'agit avant tout de remonter à l'origine même des nombres de signes contraires et comme ces nombres servent de transi-

(1) *Histoire des Mathématiques*, de MONTUCLA, tome II, page 112.

tion entre l'arithmétique et l'algèbre, on ne saurait en établir trop nettement la théorie. Or, de toutes les voies à suivre pour atteindre ce but, celle qui semble mériter la préférence est précisément celle qui s'accorde le mieux avec la méthode cartésienne, puisqu'elle consiste d'abord à définir les accroissements positifs et négatifs d'une même grandeur puis à les exprimer numériquement. Il est donc naturel de s'attendre à voir Descartes adopter cette manière de procéder. Cependant plus on essaie de pénétrer sa pensée à ce sujet et plus on se persuade qu'il regarde les nombres négatifs comme de purs symboles amenés par les exigences du calcul, mais susceptibles de s'interpréter quelquefois dans les problèmes. Autrement, s'il en rattachait l'origine aux grandeurs elles-mêmes, ne le verrait-on pas s'appuyer comme de coutume sur la considération des droites, montrer qu'elles peuvent offrir deux sens opposés, en distinguer par suite de positives et de négatives, exprimer convenablement les unes et les autres et conclure des opérations quelles comportent celles qu'on effectue sur les nombres de signes contraires. Mais rien dans sa géométrie ne décèle une tentative de ce genre. Au lieu d'aprofondir la question comme elle le mérite il l'effleure à peine et laisse planer sur elle une demi-obscurité que deux siècles de progrès n'ont pas encore dissipée. Bref, selon toute apparence, Descartes n'étend pas sa méthode aux nombres négatifs. Quant aux expressions imaginaires, il la leur applique si peu qu'il n'essaie même pas de leur assigner la moindre signification concrète.

Ainsi, la réforme cartésienne ne réalise pas tout ce qu'elle semblait promettre. Descartes entrevoit le but auquel on doit tendre ; il y marche d'abord d'un pas assuré ; puis soudain il perd le fil conducteur qui l'a si bien guidé jusqu'au milieu de sa route et finit par rentrer dans la voie commune. C'est d'ailleurs au début de la théorie des équations qu'il éprouve cette espèce de défaillance : c'est donc là qu'il faut chercher la cause de l'échec apparent de sa méthode.

Les opérations élémentaires, selon qu'elles procèdent par synthèse ou par analyse, se partagent comme on sait en deux groupes distincts. Les unes sont directes, les autres inverses, et les secondes découlent toujours des premières. C'est ainsi que l'addition, la multiplication et l'élé-

vation aux puissances entraînent respectivement après elles la soustraction, la division et l'extraction des racines. Seule, la résolution des équations algébriques semble échapper à cette loi : car bien qu'elle offre tous les caractères d'une opération inverse, elle n'est pas en apparence précédée d'une opération directe. Cette dernière cependant, si peu qu'on la remarque, n'en existe pas moins. C'est la création des formules générales dont les équations proviennent.

Lorsqu'en étudiant les propriétés d'une figure de géométrie, par exemple, on découvre entre les grandeurs qui la composent certaine relation susceptible de se traduire par une identité numérique, et qu'on remplace dans celle-ci les nombres par des lettres en vue de se procurer une expression commune à toutes les identités numériques de même forme, on effectue l'opération directe qui nous occupe : on crée une formule générale. Si l'on suppose ensuite dans cette formule toutes les lettres constantes à l'exception d'une seule et qu'on cherche à déterminer la valeur de la lettre inconnue, on aborde l'opération inverse c'est-à-dire qu'on se donne une équation à résoudre. Pour atteindre ce nouveau but, on soumet les deux membres de l'équation à des opérations identiques, jusqu'à ce que l'inconnue se trouve isolée dans un membre, l'autre membre fournit alors la réponse à la question. Mais, qu'arrive-t-il souvent? C'est que cet autre membre ne renfermant que l'indication d'un calcul impossible, l'inconnue cesse d'être un nombre absolu. A ne considérer que les nombres de cette dernière espèce, la première équation venue n'est donc pas toujours une identité numérique ; et, lorsque pour la résoudre on la regarde comme telle ; ce n'est qu'en vertu d'une convention qui entraîne à sa suite l'emploi des nombres négatifs et des expressions imaginaires. On peut encore, il est vrai, faire remonter l'introduction de ces purs symboles jusqu'aux premières opérations de l'algèbre, car il suffit pour cela d'appliquer les règles du calcul à des expressions telles que $a - b$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, ........ sans se préoccuper des valeurs données aux lettres qu'elles renferment. Mais quelle que soit la marche qu'on adopte à cet égard, on ne fait jamais qu'étendre une opération inverse au delà des bornes de l'opération directe correspondante : ce qui, pour n'être qu'une imperfection passagère de la science à

certaine phase de son développement, n'en blesse pas moins la saine logique.

Il est d'ailleurs facile de s'expliquer comment l'algèbre est entrée dans cette voie. En effet, pour définir *à priori* les nombres positifs et négatifs aussi bien que les expressions imaginaires, et préluder à la résolution des équations algébriques par la création de formules vraiment genérales, l'algèbre ne pouvait guère s'inspirer que des propriétés de l'étendue; et comme les progrès de la géométrie pure, du moins en ce qui regarde les lieux imaginaires, ne se sont élevés que de notre temps à la hauteur des siens, elle n'a trouvé que dans des conventions gratuites le moyen d'affranchir ses formules de toute espèce de restriction. Rien ne l'empêchait, cependant, d'employer déjà les nombres négatifs au même titre que les fractions et les puissances fractionnaires, tant l'analogie de ces diverses espèces de nombres était facile à saisir. Mais il fallait pour cela se garder d'obscurcir en les séparant mal à propos certaines notions qui, rapprochées les unes des autres, s'éclairent en quelque sorte d'un mutuel reflet. C'est pourquoi, même au risque de m'écarter sur ce point de l'opinion commune, j'aurai soin, dans ce qui va suivre, de réduire l'arithmétique à la théorie des nombres entiers et d'attribuer la création de tous les autres nombres à l'algèbre, si bien nommée par Newton l'arithmétique universelle.

On a l'habitude de dire qu'indépendamment de la substitution des lettres aux nombres, l'algèbre a pour caractère distinctif d'indiquer les opérations par signes au lieu de les effectuer à mesure qu'elles se présentent. Mais c'est là, ce me semble, une propriété qu'elle partage avec l'arithmétique. S'agit-il, en effet, d'additionner par exemple 6 à 20, puis de soustraire 8 du résultat, ou de multiplier 20 par 6 et de diviser le produit par 8; ou d'élever 20 à la 6e puissance et d'extraire la racine 8e de celle-ci? Je crois que l'arithmétique ne sort pas de son rôle en écrivant $20 + 6 - 8$, ou $\frac{20 \times 6}{8}$, ou $\sqrt[8]{20^6}$; et qu'elle peut même revendiquer les résultats de ces opérations successives tant qu'ils sont entiers. Mais qu'on vienne à voir dans la soustraction de 8 l'addition du nombre négatif $-8$, dans la division par 8 la multiplication par le nombre fractionnaire $\frac{1}{8}$, dans l'extraction de la racine 8e, l'élévation à la puis-

sance $\frac{6}{8}$ ; et c'est là seulement, si je ne me trompe, qu'on abandonne le domaine de l'arithmétique pour entrer dans celui de l'algèbre. Alors des deux opérations successives que, dans chacun de ces exemples, l'arithmétique se proposait d'effectuer, sur 20, il n'en reste qu'une, l'opération directe : seulement elle porte, non sur des nombres entiers, mais sur des fonctions de ces nombres. C'est ainsi que $20 + 6 - 8$, $\frac{20 \times 6}{8}$ et $\sqrt[8]{20^6}$ deviennent respectivement la somme de 20 et du polynôme $6 - 8$, le produit de 20 par la fraction $\frac{6}{8}$ et la puissance $\frac{6}{8}$ de 20. Il peut se faire d'ailleurs que polynômes, fractions, ou exposants fractionnaires se simplifient; mais lors même que ces expressions se réduisent à des nombres entiers absolus, ceux-ci, par opposition aux nombres négatifs, n'en restent pas moins implicitement affectés du signe $+$. Ainsi, ce qui caractérise l'algèbre, au point de vue où je me place, c'est la nature même des nombres sur lesquels elle opère ; et si l'on ajoute qu'elle exprime ces nombres par des lettres, on aura fait connaître à mon avis les deux seules propriétés qui la distinguent de l'arithmétique.

Cette dernière en se bornant à la conception des nombres entiers ne doit attacher aucun sens à des expressions telles que $6 - 8$, $\frac{6}{8}$ et $20^{\frac{6}{8}}$, puisqu'on ne saurait soustraire 8 de 6, ni trouver un nombre entier qui multiplié par 8 donne pour produit 6 et qu'enfin $20^6$ n'est pas une $8^e$ puissance. Mais quand l'algèbre persiste à regarder de pareilles expressions comme des nombres, ce n'est pas uniquement en vue de généraliser les opérations de l'arithmétique : c'est avant tout pour traduire en son langage certaines propriétés de la grandeur et combler une lacune qui remonte jusqu'à la numération elle-même.

Si la nature ne nous offrait jamais que des collections d'êtres ou d'objets de même espèce, le nombre entier serait le seul nécessaire. Mais, comme les grandeurs qu'il s'agit le plus souvent de soumettre au calcul, sont continues, c'est-à-dire susceptibles de croître par degrés insensibles, il est clair qu'on est loin de les avoir toutes mesurées, lorsqu'on a choisi pour unité l'une d'elles, et fait servir les nombres entiers à en exprimer les multiples. Car il reste à évaluer celles d'entre ces grandeurs qui n'ont, avec l'unité, qu'une commune mesure moindre qu'elle,

et celles qui n'en ont pas du tout. Afin d'exprimer les premières, on prend pour unité nouvelle et l'on nomme unité fractionnaire leur commune mesure avec l'unité ; si cette unité nouvelle est contenue $n$ fois dans l'autre, on la représente par $\frac{1}{n}$, et ses multiples se traduisent par les fractions. Quant aux grandeurs qui n'ont pas de commune mesure avec l'unité primitive, elles servent à définir les nombres incommensurables, dont les puissances fractionnaires ne sont que des cas particuliers, et permettent de regarder ces nombres comme la limite commune de deux fractions susceptibles de se rapprocher indéfiniment l'une de l'autre. Ces premières modifications de l'idée de nombre ne sont donc bien amenées que par la nécessité d'exprimer aussi fidèlement que possible une des propriétés de la grandeur : savoir, la continuité.

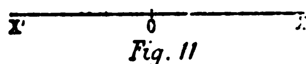


Fig. 11

Mais quand on est arrivé, par exemple, à traduire en nombre toutes les droites commensurables et incommensurables prises à partir du point O dans le sens OX, la continuité ne s'impose-t-elle pas au calculateur en lui donnant à mesurer les droites de sens OX'? On objectera que les mêmes nombres qui représentent les premières droites peuvent servir à exprimer les secondes. Encore faudrait-il, pour appuyer convenablement cette assertion, démontrer l'inutilité de tenir compte en algèbre des deux sens opposés que peuvent offrir certaines grandeurs. Mais c'est ce qu'on ne fait pas : disons mieux, c'est ce qu'on ne saurait faire, car il s'agit moins en pareil cas de raisonner *a priori* que d'en appeler à l'expérience. La tendance continuelle des mathématiques, on le sait, est de généraliser, c'est-à-dire de grouper le plus grand nombre possible de faits particuliers dans un même énoncé, puis dans une même formule. Or, si pour atteindre ce but suprême, il faut de toute rigueur encombrer l'algèbre de symboles dénués de sens et de règles conventionnelles, qu'on s'en tienne aux nombres absolus dans l'évaluation des grandeurs, rien de mieux ! Mais s'il est possible au contraire d'établir sur les considérations géométriques les plus simples, une théorie parfaitement rigoureuse des nombres positifs ou négatifs et même des expressions imaginaires; si de plus la géométrie pure ne fait que gagner à ce changement, quelle raison sérieuse alléguerait-on pour s'en tenir encore à l'ancienne

méthode ? La question se réduit donc à faire voir que l'algèbre, loin d'être forcée de recourir à l'emploi d'êtres de raison pour généraliser ses formules, peut y parvenir d'une manière à la fois plus rationnelle, plus féconde et plus simple en continuant de s'appuyer, comme le voulait Descartes, sur la seule conception de la ligne droite. Tel est le but que je crois avoir atteint dans la seconde partie de ce mémoire.

Cette seconde partie n'est qu'un résumé des principales définitions d'arithmétique et d'algèbre, calqué sur une note du cours d'analyse de Cauchy. Le mieux eût peut-être été d'y parler, dès la numération, des nombres négatifs, des fractions et même des nombres imaginaires, puis de montrer que les signes de ces diverses fonctions du nombre entier devaient être plus tard ceux de la soustraction, de la division et de certaines racines ; mais pour ne pas trop m'écarter sur ce point des idées reçues, j'ai préféré ne faire intervenir chaque symbole algébrique qu'après les opérations successives qui le rendaient nécessaire.

Pour ce qui est des nombres de signes contraires, j'en établis la théorie sur la définition précise des droites positives ou négatives et des opérations qu'elles comportent, d'où il suit que j'arrive à démontrer facilement les règles des signes, règles jusqu'ici, comme on sait, purement conventionnelles. Je fais voir ensuite que la géométrie ne gagne pas moins que l'algèbre à cette extension de la méthode cartésienne, en ce sens qu'il lui est, dès lors, possible de réunir en un seul groupe des figures assez différentes au premier abord, et de les exprimer par une même formule : ce qui revient à fonder le principe de la Corrélation des figures sur d'autres considérations que celles qu'a essayé de faire prévaloir Carnot. Enfin, comme je subordonne à la création des formules générales la résolution des équations algébriques, je n'ai pas de peine à montrer que les solutions positives ou négatives de celles-ci ne cessent jamais d'avoir une signification concrète bien déterminée.

Mais, après ces premières difficultés, s'en présentaient d'autres plus sérieuses, réputées même insurmontables. Il fallait, en effet, opposer aux droites réelles, des droites imaginaires ayant leurs caractères propres ; fonder sur les opérations dont les unes et les autres étaient susceptibles, les règles du calcul des nombres de modes quelconques, et demander à

la géométrie des formules aussi générales que les équations algébriques les plus compliquées, afin de pouvoir toujours regarder la résolution des unes comme inverse de la création des autres.

Impossible de le nier d'ailleurs : parmi toutes les conceptions géométriques usitées jusqu'à ce jour, aucune ne pouvait satisfaire entièrement aux conditions requises, pas même celle des quantités complexes. Le problème à résoudre impliquait, en effet, et la construction avec leurs modes respectifs de toutes les parties d'une figure de géométrie supérieure, et l'extension du système de coordonnées de Descartes, au cas de variables imaginaires ou mixtes. C'étaient là deux épreuves décisives dont la solution proposée devait sortir victorieuse. Or, en admettant même que les quantités complexes permettent de démontrer *à priori* les premières règles du calcul algébrique, on est bien forcé de reconnaître que ces sortes de grandeurs ne se prêtent pas à la construction des branches ou des nappes imaginaires d'un lieu. De là leur insuffisance dans la question qui nous occupe.

Il est juste de dire cependant que loin de compliquer cette question les deux épreuves, dont je viens de parler, étaient plutôt de nature à faire découvrir aux géomètres le moyen de la résoudre. En effet, la pratique du système de coordonnées de Descartes ne pouvait manquer de suggérer tôt ou tard cette réflexion, que l'ordonnée de la circonférence, en devenant imaginaire, prend les mêmes valeurs absolues que celle de l'hyperbole équilatère conjuguée : et de là à comparer les deux courbes ; puis, leur analogie dûment constatée, à essayer d'en faire deux branches d'un même lieu, la pente était si naturelle qu'on ne devait pas hésiter à la suivre. Aussi, parmi ceux qui se sont préoccupés du rôle des imaginaires, soit en géométrie supérieure, soit dans le système de coordonnées de Descartes, en est-il beaucoup qui cherchèrent à atteindre ce but. J'ajouterai que la voie qu'ils inauguraient ainsi, loin d'être sans issue, comme on le croit encore, était probablement la seule qui pût conduire à la solution complète du problème.

Vincent Ricatti, puis Lambert, semblent s'être aperçu les premiers des analogies que présentent l'hyperbole équilatère et la circonférence ; ils en firent, comme on sait, la base d'une trigonométrie nouvelle, ayant

pour objet les fonctions hyperboliques. Plus tard, Carnot, dans ses ouvrages de mathématiques, revint à plusieurs reprises sur la comparaison des mêmes courbes; mais sa théorie des quantités directes et inverses, ne lui permit d'établir entre elles qu'une corrélation fort imparfaite. Enfin, grâce à la conception des cordes idéales, Poncelet fit faire à la question un pas important; car il sut deviner comme par une sorte d'intuition naturelle au génie la forme des branches imaginaires de la circonférence, en conclut sa belle théorie des coniques supplémentaires et put agrandir ainsi le champ des spéculations géométriques. Mais son procédé, comme il en convient du reste, lui-même, ne consistait qu'en de simples rapprochements entre des courbes réelles. Les points, les lignes imaginaires ne l'étaient que de nom : entre ces points, ces lignes et les éléments réels d'une figure quelconque il n'y avait pas de connexion possible. En un mot tout lieu géométrique formé de parties, les unes réelles, les autres soi-disant imaginaires, manquait nécessairement d'unité. La même remarque s'applique, aux travaux plus récents de M. Marie. On sait, que ce dernier géomètre, a pu retrouver les coniques supplémentaires en coordonnées rectilignes, et même étendre cette conception aux courbes de degré supérieur. Mais, comment y parvient-il? En représentant par des droites réelles les valeurs imaginaires ou mixtes des variables. C'est donc en vain que les rapprochements les plus ingénieux se multiplient dans ses remarquables mémoires; la question n'y fait en définitive aucun progrès décisif. On peut même dire que la doctrine des quantités complexes offre sur le mode de construction adopté par M. Marie l'avantage de distinguer nettement les droites imaginaires des droites réelles.

Je n'ai pas besoin de dire avec quelle défiance de mes forces j'abordais, il y a plus de quinze ans, ces questions ardues. Mais je dois ajouter qu'une conception simple, à laquelle personne avant moi ne paraît avoir songé, m'a peu à peu donné l'espoir de les résoudre.

Cette conception consiste à regarder tout point géométrique comme étant formé de deux points ordinaires que j'appelle ses composantes. Un point géométrique est réel tant que ses composantes coïncident, mais dès qu'elles se séparent il devient imaginaire; en sorte qu'un point imaginaire existe au même titre qu'un point réel, et ne peut se confondre

avec lui. Deux points imaginaires sont d'ailleurs conjugués quand la première composante de l'un est la seconde composante de l'autre et réciproquement. Telles sont les définitions nouvelles que je propose d'introduire d'abord en géométrie puis en algèbre, afin d'achever la réforme si heureusement commencée par Descartes.

Comment ces définitions permettent-elles de rattacher intimement la géométrie supérieure à l'analyse ancienne? ce n'est pas ici le lieu de le dire. Mais quel usage en peut-on faire pour élucider les principes d'algèbre? c'est ce que je vais indiquer rapidement en rendant compte de la manière dont je termine la seconde partie de ce mémoire.

De la conception des points de modes contraires je passe sans peine à celle de droites réelles, imaginaires ou mixtes; puis, je définis l'égalité et la somme de deux droites quelconques et j'en conclus la possibilité de soumettre ces grandeurs à toutes les opérations élémentaires. J'exprime ensuite les droites de chaque mode par des symboles convenables appelés les uns nombres réels, les autres nombres imaginaires et je fais découler les règles relatives à ces nombres des opérations effectuées sur les grandeurs mêmes qu'ils représentent. Étant parvenu de la sorte à considérer des proportions géométriques soit entre des droites quelconques, soit entre les nombres qui les expriment, je montre comment ces proportions conduisent aux équations du premier ou du second degré à une inconnue ; puis je prouve que réciproquement la résolution de toute équation de degré moindre que le troisième se ramène à la recherche soit d'une quatrième proportionnelle à trois droites, soit d'une moyenne proportionnelle entre deux droites de modes quelconques ; et, comme les équations des deux premiers degrés servent à former toutes les autres, il faut bien en conclure que celles-ci n'admettent pas d'autres solutions que les nombres réels, imaginaires ou mixtes, tels que je les ai définis. L'algèbre, sans raisonner sur d'autres grandeurs que des droites, se trouve donc par là complétement affranchie des êtres de raison et des règles conventionnelles qui, selon l'expression de Descartes, en faisaient un art confus et obscur. Mais là ne se bornent pas les avantages que présente l'emploi des droites, de modes quelconques. Celles-ci peuvent en effet remplir l'office de coordonnées rectilignes,

et, à ce titre, elles permettent non-seulement de construire d'une manière complète le lieu d'une équation à deux ou trois variables, mais encore de déterminer graphiquement et par des procédés uniformes toutes les racines d'une équation à une seule inconnue: ce qui forme comme le couronnement de la géométrie cartésienne. Si j'ajoute enfin que ces mêmes droites se prêtent aussi bien à l'étude des fonctions hyperboliques qu'à celle des fonctions circulaires, et qu'elles paraissent devoir soutenir la concurrence avec les quantités complexes, soit pour l'interprétation des périodes des intégrales, soit dans la recherche des propriétés des fonctions, j'aurai, je pense, fait assez pressentir l'étendue des services qu'elles sont appelées à rendre en algèbre.

---

# DEUXIÈME PARTIE

## DÉFINITIONS D'ARITHMÉTIQUE ET D'ALGÈBRE.

**SOMMAIRE** : Grandeurs, leur mesure. — L'arithmétique est la science des nombres entiers. — L'algèbre exprime les propriétés de la grandeur continue à l'aide de fonctions du nombre entier. — Addition. — Soustraction. — Opérations successives. — Droites positives et négatives. — Nombres de signes contraires. — Addition algébrique. — Somme algébrique de droites. — Polynômes. — Soustraction algébrique. — Reste et Rapport par différence. — Proportions et Progressions arithmétiques. — Multiplication. — Division. — Opérations successives. — Fractions. — Nombres incommensurables. — Multiplication algébrique. — Division algébrique. — Quotient et Rapport par quotient. — Proportions et progressions géométriques. — Impossibilité de trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites de sens contraires. — Définition des points réels et imaginaires. — Droites de modes quelconques. — Opérations qu'elles comportent. — Conséquences qui en résultent pour le calcul des nombres imaginaires. — Moyens égaux ou symétriques entre deux droites quelconques. — Puissances. — Racines. — Opérations successives. — Puissances et racines algébriques. — Formules générales et équations. — Les solutions des équations algébriques ne sont autres que les nombres réels ou imaginaires définis précédemment. — Examen de quelques problèmes de géométrie résolus par l'algèbre. — Conversion des droites réelles ou imaginaires en quantités complexes.

Une grandeur est du domaine des mathématiques dès qu'on sait définir l'*égalité* et la *somme* de deux grandeurs de cette espèce. On l'appelle alors *grandeur mesurable*.

Une droite, par exemple, est une grandeur mesurable, puisqu'on sait définir l'égalité et la somme de deux droites.

Une somme dont toutes les parties sont égales est un ***multiple*** de l'une d'elles ; et celle-ci est un *sous-multiple* ou une ***partie aliquote*** de la somme.

Afin de comparer plus facilement entre elles les grandeurs de même

espèce, on les rapporte toutes à l'une d'elles prise pour terme de comparaison: celle-ci s'appelle *unité*. L'unité et ses multiples nous donnent l'idée du *nombre entier*. Le premier des nombres entiers s'appelle unité comme la grandeur qu'il exprime.

L'*Arithmétique* est la science des nombres entiers: elle se divise en deux parties: *numération* et *calcul*.

La numération a pour but de former, unité par unité, les nombres entiers, de les nommer tous à l'aide de quelques mots et de les écrire tous à l'aide de quelques caractères appelés chiffres.

Le calcul est la partie de l'arithmétique qui sert à former et à décomposer les nombres au moyen de procédés plus rapides que celui de la numération. Ces procédés se nomment *opérations élémentaires*.

Les opérations élémentaires sont au nombre de six, savoir : *addition*, *soustraction*, *multiplication*, *division*, *élévation aux puissances*, *extraction des racines*. Toutes sont l'écriture d'opérations analogues effectuées sur des droites; mais il est plus simple d'appliquer les deux dernières aux nombres seulement. Enfin, l'addition, la multiplication et l'élévation aux puissances sont des opérations directes ou synthétiques, et chacune d'elles est suivie de l'opération inverse.

L'*Algèbre*, loin de se borner comme l'arithmétique à l'expression de l'unité et de ses multiples, s'attache à traduire aussi fidèlement que possible les propriétés de la grandeur continue. Elle crée à cet effet des combinaisons de nombres entiers et de signes en leur donnant les noms de *nombres positifs*, *négatifs*, *fractionnaires*, *incommensurables*, *imaginaires*,... puis, elle représente ces nouveaux nombres par des lettres et les soumet à leur tour aux six opérations élémentaires.

### ADDITION.

Additionner deux ou plusieurs grandeurs de même espèce, c'est en former la somme.

Additionner deux nombres entiers, c'est en former un autre qui représente la somme des grandeurs exprimées par ces nombres. Le résultat s'appelle *somme*, les nombres donnés en sont les *parties*.

## SOUSTRACTION.

La soustraction a pour but connaissant une somme et l'une de ses parties, de trouver l'autre. Le résultat s'appelle *reste*.

Cette définition s'applique aux grandeurs comme aux nombres.

## ADDITIONS ET SOUSTRACTIONS SUCCESSIVES.

On peut avoir à effectuer, sur une même grandeur, des additions et soustractions successives. Il est facile de s'assurer d'abord que l'ordre de ces opérations n'influe pas sur le résultat. La comparaison des diverses manières de procéder qui conduisent à ce résultat permet ensuite de discerner celle qui donne la règle la plus simple.

En considérant, par exemple, une droite AB suffisamment grande, on trouve qu'il revient au même.



*Fig. 12*

1° D'additionner l'une après l'autre à la droite AB les droites BC et CD (*fig.* 12), ou de lui en additionner la somme BD ;



*Fig. 13*

2° D'additionner à la droite AB la droite BC, puis de soustraire du résultat la partie CD, moindre que BC (*fig.* 13), ou d'additionner à AB le reste BD que donne BC diminuée de CD ;

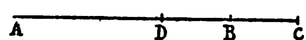


*Fig. 14*

3° D'additionner à la droite AB la droite BC, puis de soustraire du résultat la partie CD plus grande que BC (*fig.* 14), ou de soustraire de AB le reste BD que donne CD diminuée de BC ;

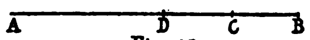


*Fig. 15*

4° De soustraire l'une après l'autre de AB les parties BC et CD (*fig.* 15), ou d'en soustraire la somme BD.

De là, on conclut des règles particulières appropriées à chaque cas, ainsi que des égalités numériques de différentes formes ; mais est-il possible de ramener toutes ces règles à une seule et toutes ces égalités à l'une d'elles comme type ?

Si l'on compare le résultat partiel BD à la droite AB, on voit qu'il faut tantôt l'additionner à cette droite, tantôt l'en soustraire. De plus la droite BD est égale tantôt à la somme des droites BC et CD, tantôt au reste que donne la plus grande des deux, diminuée de la plus petite.

Il semble difficile, au premier abord, de ne voir qu'une seule opération dans l'ensemble de ces additions et soustractions successives, puis d'en grouper les divers résultats dans une formule unique. On y est parvenu cependant, mais en étudiant de plus près les grandeurs continues.

## ADDITION ALGÉBRIQUE.

Il est évidemment permis de concevoir une droite AB comme engendrée par le mouvement d'un point allant soit de A en B, soit de B en A. De là, par conséquent, la possibilité de tenir compte à la fois de la longueur et du mode de formation de cette droite. Afin de simplifier le langage, j'appelle respectivement origine et extrémité de la droite les positions initiale et finale du point générateur, et sens de la droite le sens même du mouvement. Puis je regarde les deux sens AB et BA comme contraires entre eux.

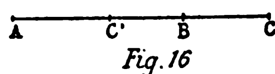


Fig. 16

Cela posé, si le point générateur après s'être avancé en ligne droite de A en B, continue de se mouvoir dans la même direction suivant BC ou rétrograde suivant BC', il est clair que les droites AB et BC sont de même sens, tandis que les droites AB et BC' sont de sens contraires. De plus, dans un cas comme dans l'autre, la suite des deux droites peut se remplacer par une droite unique AC ou AC' ayant pour origine celle de la première et pour extrémité celle de la seconde. Cette droite unique a reçu le nom de *Somme algébrique* des deux autres, et celles-ci en sont les *parties positives* ou *négatives* suivant qu'elles sont de sens AB ou de sens BA. Mais OC et OC' sont à un autre point de vue les résultats l'une de l'addition, l'autre de la soustraction de deux droites absolues : de là, la possibilité de regarder ces deux dernières opérations comme des cas particuliers d'une opération plus générale ayant pour but de remplacer deux parties de même sens ou de sens contraires par leur somme

algébrique. Cette opération nouvelle a reçu le nom d'***Addition algébrique***.

Il s'agit maintenant d'assigner une expression numérique convenable aux diverses parties d'une somme algébrique, ainsi qu'à la somme elle-même. A cet effet, le moyen qui s'offre d'abord à l'esprit est d'affecter d'un signe les valeurs absolues des parties positives, d'un autre signe celle des parties négatives; de regarder ces deux signes comme contraires entre eux et d'appeler les symboles ainsi obtenus nombres positifs ou négatifs du nom des parties qu'ils auront à représenter. Inutile d'ajouter que les notations les plus simples devront être préférées.

Quels que soient d'ailleurs les symboles adoptés, la valeur numérique d'une somme algébrique sera, par définition, la *somme algébrique* des valeurs de ses parties.

Cela dit, soient $a$ et $b$ les longueurs des droites AB et BC ou BC', celles de leur somme AC ou AC'; on pourrait exprimer le sens de chacune de ces droites en affectant d'un accent par exemple les longueurs des parties positives, et de deux accents celles des parties négatives. De cette façon les égalités.

$$AB + BC = AC, \qquad AB + BC' = AC'$$

se traduiraient numériquement par

$$a' + b' = s', \qquad a' + b'' = s'.$$

Mais comme l'addition d'une partie positive ou négative revient à l'addition ou à la soustraction de la droite absolue correspondante, on a jugé plus simple de prendre pour *nombre positif* un nombre absolu précédé ou non du signe +, et pour *nombre négatif* un nombre absolu précédé du signe —. De plus, au lieu d'écrire les égalités précédentes de cette façon

$$a + (+ b) = s, \qquad a + (- b) = s,$$

on a pris l'habitude de les écrire

$$a + b = s, \qquad a - b = s,$$

Enfin, en représentant un nombre positif ou négatif comme un nombre absolu, par une lettre, on a pu résumer les deux égalités précédentes dans celle-ci

$$a + b = s$$

où les valeurs de $b$ sont, suivant les cas, positives ou négatives.

Il est maintenant facile d'étendre les mêmes considérations à une suite quelconque de droites absolues. Si donc on se reporte à la question qui nous a servi de point de départ, c'est-à-dire aux figures 12, 13, 14, 15, on en conclura que les additions ou soustractions successives, effectuées sur la droite AB, se ramenant toutes à l'addition de trois parties positives ou négatives, sont par là même susceptibles de se résumer dans une règle simple et de se traduire par une relation de la forme

$$a + b + c = s.$$

En général une suite de nombre positifs ou négatif s'appelle *polynôme :* ces nombres en sont les *termes*, et leur *somme algébrique* est la valeur du polynôme.

Une somme algébrique de droites ne change évidemment pas avec l'ordre de ses parties ; on peut donc y remplacer deux ou plusieurs parties, telles que BC et CD (*fig.* 12, 13, 14, 15,) par leur *somme partielle* BD, ce qui montre en particulier que :

1° La somme de deux parties de même sens a pour longueur la somme des leurs et même sens qu'elles ;

2° La somme de deux parties de sens contraires a pour longueur la différence des leurs et même sens que la plus longue.

Comme on a désigné plus haut par $b$ et $c$ les valeurs positives ou néga-

tives des droites BC et CD, si l'on représente de même par $x$ la valeur de leur somme partielle, on a dans tous les cas possibles

$$b + c = x,$$

D'où l'on conclut en particulier que:

1° La somme de deux termes de même signe a pour valeur absolue la somme des leurs et même signe qu'eux;

2° la somme de deux termes de signes contraires a pour valeur absolue la différence des leurs et même signe que la plus grande valeur absolue.



*Fig. 17*

D'après tout ce qui vient d'être dit, il semble qu'une droite absolue ne puisse jouer que dans une somme algébrique le rôle de partie positive ou négative. Rien ne s'oppose cependant à ce qu'après avoir considéré les accroissements positifs ou négatifs d'une droite, on fasse abstraction de celle-ci pour comparer ces accroissements soit entre eux, soit à ceux d'une autre droite; et souvent il y a grand avantage à le faire. Ainsi, lorsqu'on prend pour origine l'extrémité O d'une droite indéfinie AO (*fig.* 17), on peut faire abstraction de cette droite pour ne tenir compte que de ses accroissements positifs ou négatifs OM ou OM', et se procurer de la sorte un système de droites de sens contraires, issues de la même origine et déterminant sans ambiguïté la position d'un point quelconque M ou M' de la direction donnée. De même en regardant le point O comme l'origine des accroissements d'une autre droite quelconque, on peut comparer ces accroissements à ceux de la première.

### SOUSTRACTION ALGÉBRIQUE.

La *Soustraction algébrique* a pour but connaissant une somme algébrique et l'une de ses parties de trouver l'autre.

Cette définition s'applique aux grandeurs comme aux nombres.

Toutefois, lorsqu'il s'agit de grandeurs, on peut, pour plus de précision, distinguer deux cas, suivant que la partie donnée a même extrémité ou même origine que la somme.

Dans le premier cas, le résultat s'étend de l'origine de la somme à celle de la partie donnée, il prend alors le nom de *reste*. Pour l'obtenir, il suffit d'additionner à la somme une partie égale et de signe contraire à la partie donnée : d'où il suit que, pour soustraire un nombre d'un autre, il suffit d'additionner à cet autre un nombre égal et de signe contraire au premier.

Dans le second cas, le résultat porte, ainsi qu'on va le voir, un autre nom.

Afin de comparer entre eux deux accroissements de même espèce et de sens quelconque, on peut se proposer de trouver la partie qu'il faut additionner à l'un pour obtenir une somme égale à l'autre : cette partie s'appelle *rapport par différence*, ou simplement *différence* de la seconde grandeur à la première.

Pour trouver la différence d'une droite à une autre, il faut les aligner dans leurs sens respectifs, de telle sorte qu'elles aient même origine, et la droite qui s'étend de l'extrémité de la seconde à celle de la première est la différence cherchée.

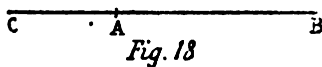


*Fig. 18*

Il est clair que deux accroissements donnent lieu à deux différences de même valeur absolue, mais de sens contraires. Ainsi la différence de la droite positive AB à la droite négative AC est la droite positive CB (*fig.* 18), tandis que la différence de la droite AC à la droite AB est la droite négative BC.

Afin de coordonner entre elles les grandeurs de même espèce, on est convenu de dire qu'une d'elles est *plus grande* qu'une autre quand sa différence à cette autre est positive.

Il résulte de cette convention que :

1° Toute grandeur négative est moindre qu'une grandeur positive, même infiniment petite ;

2° De deux grandeurs positives la plus grande est celle qui surpasse l'autre en valeur absolue, tandis que le contraire a lieu pour deux grandeurs négatives.

L'égalité de deux différences s'appelle *proportion arithmétique*.

Une *progression arithmétique* est une suite de grandeurs telles que la différence de chacune d'elles à la précédente est constante : cette différence se nomme *raison*. Suivant que la raison est positive ou négative, la progression est croissante ou décroissante.

La *différence* d'un nombre à un autre est le nombre qu'il faut additionner au second pour obtenir une somme égale au premier.

Un nombre est dit *plus grand* qu'un autre quand sa différence à cet autre est positive. D'où il suit que :

1° Tout nombre négatif est moindre qu'un nombre positif et même que zéro ;

2° De deux nombres positifs le plus grand est celui qui surpasse l'autre en valeur absolue, tandis que le contraire a lieu pour deux nombres négatifs.

Les nombres donnent lieu, comme les grandeurs, soit à des proportions soit à des progressions arithmétiques. C'est ainsi que la suite naturelle des nombres entiers forme une progression arithmétique croissante qui s'étend de l'infini négatif à l'infini positif.

## MULTIPLICATION.

Multiplier une grandeur absolue par un nombre entier, c'est faire la somme d'autant de grandeurs égales à la première qu'il y a d'unités dans ce nombre. Le résultat se nomme *produit;* la grandeur et le nombre donnés s'appellent collectivement *facteurs* du produit, et portent en particulier, l'une le nom de *multiplicande*, l'autre celui de *multiplicateur*.

Multiplier un nombre entier par un autre, c'est trouver la valeur du produit obtenu en multipliant par cet autre nombre la grandeur qu'exprime le premier. Les noms des données et du résultat restent les mêmes que pour les grandeurs.

## DIVISION.

La division a pour but connaissant un produit appelé *dividende* et l'un

de ses facteurs appelé *diviseur* de trouver l'autre. Quand le facteur donné est le multiplicateur, le résultat se nomme *quotient*.

Cette définition s'applique aux grandeurs comme aux nombres.

### MULTIPLICATIONS ET DIVISIONS SUCCESSIVES.

On peut avoir à effectuer sur une même grandeur des multiplications et des divisions successives : on démontre sans peine que l'ordre de ces opérations n'influe pas sur le résultat, et qu'étant donnée une droite avec les nombres entiers $m$ et $n$, il revient au même :

1° De la multiplier successivement par $m$ et par $n$, ou *vice versâ* ;

2° De la multiplier par $m$, puis de diviser le produit par $n$, ou de la diviser d'abord par $n$, puis de multiplier le quotient par $m$ ;

3° De la diviser successivement par $m$ et par $n$, ou *vice versâ*.

Il est encore aisé, comme on va le voir, de ramener ces opérations successives à une seule et d'en grouper les divers résultats dans une formule unique.

### MULTIPLICATION ALGÉBRIQUE.

Parmi les grandeurs continues de même espèce, il en est qui sont moindres que l'unité, ou qui étant plus grandes qu'elle, n'en sont pas des multiples. La nécessité de mesurer les unes et les autres a conduit à partager l'unité en un nombre quelconque de parties égales appelées *unités fractionnaires*, et toute unité fractionnaire ou collection d'unités fractionnaires de même espèce a reçu le nom de *fraction*.

Lorsqu'on partage l'unité linéaire en $n$ parties égales, par exemple, chacune des unités fractionnaires ainsi obtenues se représente par $\frac{1}{n}$, et la fraction formée de $m$ de ces nouvelles unités par $\frac{m}{n}$. Toute fraction est donc exprimée par deux nombres entiers : ces nombres se nomment collectivement *termes* de la fraction : l'un, appelé *numerateur*, indique le nombre, et l'autre, appelé *dénominateur*, le nom des unités qui la composent.

Mais quand on partage l'unité linéaire en $n$ parties égales, l'une des

parties est le quotient de la division de cette unité par $n$ : donc $\frac{1}{n}$ tient lieu de $1 : n$; par suite, la barre de fraction peut se remplacer par le signe de division et réciproquement. Toutefois, on a pris l'habitude d'employer concurremment les deux signes.

Cela posé, quand on multiplie une droite par un nombre entier $m$, on fait sur cette droite ce qu'on a fait sur l'unité pour obtenir la grandeur exprimée par le multiplicateur.

Mais quand on divise une droite par le nombre entier $n$, on peut dire aussi qu'on fait sur la droite ce qu'on a fait sur l'unité pour obtenir la grandeur exprimée par $\frac{1}{n}$.

De là la possibilité de regarder la multiplication et la division d'une droite par un nombre entier comme deux cas particuliers d'une opération plus générale ayant pour but de faire sur une grandeur appelée multiplicande ce qu'on a fait sur l'unité pour obtenir la grandeur exprimée par un nombre appelé multiplicateur. Cette opération nouvelle, dont le résultat conserve le nom de produit, s'appelle *multiplication algébrique*.

D'après cela la division d'une droite par un nombre entier $n$ revient à la multiplication algébrique de cette droite par $\frac{1}{n}$ ; et si l'on étend cette manière de voir à l'unité linéaire, on en conclut par des multiplications et divisions successives, que $m \times n = n \times m = mn$, $m \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times m = \frac{m}{n}$ et que $\frac{1}{m} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{mn}$. Dès lors, il est facile de ne voir qu'une seule opération dans une suite de multiplications ou divisions effectués sur une droite.

En effet, lorsqu'on multiplie successivement la droite par les nombres entiers $m$ et $n$ ou inversement, on fait sur la droite les opérations qu'on a faites sur l'unité pour obtenir la grandeur exprimée par $m \times n = n \times m = mn$, ou en d'autres termes, on multiplie la droite par le produit $mn$.

De même quand on multiplie la droite par le nombre entier $m$ pour la diviser ensuite par le nombre entier $n$ ou *vice versâ*, on fait sur la droite les opérations qu'on a faites sur l'unité pour obtenir la grandeur exprimée par $m \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times m = \frac{m}{n}$. Il est donc permis de dire qu'on multiplie alors la droite par la fraction $\frac{m}{n}$.

Enfin, quand on divise successivement la droite par les nombres entiers $m$ et $n$ ou *vice versâ*, on fait sur la droite les opérations qu'on a faites sur l'unité pour obtenir la grandeur exprimée par $\frac{1}{m} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{mn}$, et par suite on peut dire qu'on multiplie la droite par la fraction $\frac{1}{mn}$.

Comme, d'après sa définition même, la multiplication algébrique semble devoir comporter autant de cas particuliers qu'il y a d'espèces de nombres, il reste à examiner si elle est vraiment susceptible d'une pareille extension. C'est ce que je vais faire en considérant d'abord certains nombres absolus qui ne sont ni entiers ni fractionnaires; puis les nombres de signes quelconques.

Parmi les grandeurs continues de même espèce, les unes, et c'est le plus grand nombre, sont multiples de l'unité ou d'une de ses parties aliquotes : on les appelle *grandeurs commensurables avec l'unité*, et les nombres qui les expriment sont entiers ou fractionnaires. Les autres ne sont multiples d'aucune partie aliquote de l'unité, si petite qu'elle soit; ce sont les *grandeurs incommensurables avec l'unité*.

Le nombre qui représente une grandeur incommensurable avec l'unité est par définition plus grand que ceux qui expriment des grandeurs commensurables moindres qu'elle, et plus petit que ceux qui en expriment de plus grandes. On l'appelle *nombre incommensurable* et la définition précédente lui assigne une valeur parfaitement déterminée.

En effet, rien n'empêche de resserrer la grandeur incommensurable entre deux multiples consécutifs d'une partie aliquote toujours de plus en plus petite de l'unité, et comme les nombres qui représentent ces deux multiples diffèrent l'un de l'autre d'une unité fractionnaire toujours de plus en plus petite, ils s'approchent indéfiniment, mais sans l'atteindre jamais, d'une certaine valeur que l'esprit conçoit comme leur limite commune. Cette valeur est le nombre incommensurable lui-même.

Cela posé, qu'on se donne avec une droite absolue le nombre incommensurable défini par les fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ susceptibles de se rapprocher indéfiniment l'une de l'autre : il est clair que dès qu'on cherche une droite comprise entre les produits de la première par les fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ on opère sur la droite donnée comme on l'a fait sur l'unité

pour trouver le nombre incommensurable. L'analogie conduit donc à ne voir dans cette opération qu'un nouveau cas de la multiplication algébrique, ce qui est d'autant plus naturel que la définition de celle-ci n'en souffre aucune modification.

Cette même définition suffit encore quand la droite, au lieu d'être absolue, est de sens quelconque et que le multiplicateur est un nombre positif. Reste donc à examiner le cas d'un multiplicateur négatif.

Or, étant donnée une droite quelconque, on peut indifféremment multiplier cette droite par $m$ et changer le sens du produit, ou changer d'abord le sens de la droite ; puis, la multiplier par $m$ ; car, d'un côté comme de l'autre, on arrive au même résultat. Mais on fait alors sur la droite ce qu'on a fait sur l'unité positive pour obtenir la grandeur exprimée par le nombre négatif $-m$. Donc, il suffit de substituer l'unité positive à l'unité absolue dans la définition de la multiplication algébrique pour que celle-ci comprenne encore le cas actuel.

En résumé, la multiplication algébrique a jusqu'ici pour but de faire, sur une grandeur positive ou négative, appelée multiplicande, ce qu'on a fait sur l'unité positive pour obtenir la grandeur exprimée par un nombre quelconque appelé multiplicateur.

Quant à la multiplication algébrique d'un nombre par un autre, elle consiste à trouver la valeur du produit obtenu en multipliant par cet autre nombre la grandeur qu'exprime le premier. De cette définition résultent les règles relatives au produit de deux nombres de signes quelconques, d'ailleurs entiers, fractionnaires ou incommensurables ; et l'on en conclut en particulier que le produit de deux nombres de même signe est positif, tandis que celui de deux nombres de signes contraires est négatif.

Comme on est déjà convenu d'exprimer par une lettre un nombre entier de signe quelconque, il est naturel d'étendre la même convention aux nombres fractionnaires ou incommensurables. Dès lors, le produit de deux nombres donnés $a$ et $b$ s'exprime constamment par la formule

$$ab = p$$

dans laquelle $p$ désigne l'une quelconque des fonctions du nombre entier que l'on vient de considérer.

## DIVISION ALGÉBRIQUE.

La *division algébrique* a pour but connaissant un produit appelé *dividende* et l'un de ses facteurs de trouver l'autre.

Si le dividende est une grandeur et que le facteur donné soit un nombre, celui-ci s'appelle *diviseur* et le résultat *quotient*. Mais ce résultat change de nom, comme on va le voir, si le facteur donné est une grandeur de l'espèce du dividende.

On peut se proposer, connaissant deux grandeurs de même espèce, de trouver le nombre par lequel il faut multiplier l'une pour obtenir un produit égal à l'autre. Ce nombre s'appelle *rapport par quotient* ou simplement *rapport* de la seconde grandeur à la première.

*Fig. 19*

Ainsi, le rapport de la droite AB à la droite CD est le nombre quelconque $m$ par lequel il faut multiplier CD pour obtenir AB. Ce nombre se désigne par $\frac{AB}{CD}$, en sorte qu'on a $\frac{AB}{CD} = m$ ou $AB = CD \times m$. En d'autres termes; CD est le quotient de la division de AB par $m$, tandis que $m$ est le rapport de AB à CD.

Deux grandeurs de même espèce donnent lieu à deux rapports appelés l'un direct et l'autre inverse. Ainsi les droites AB et CD ont pour rapport direct $\frac{AB}{CD}$, pour rapport inverse $\frac{CD}{AB}$.

Deux grandeurs sont *directement* ou *inversement proportionnelles* à deux autres suivant que le rapport direct des premières est égal au rapport direct ou inverse des secondes.

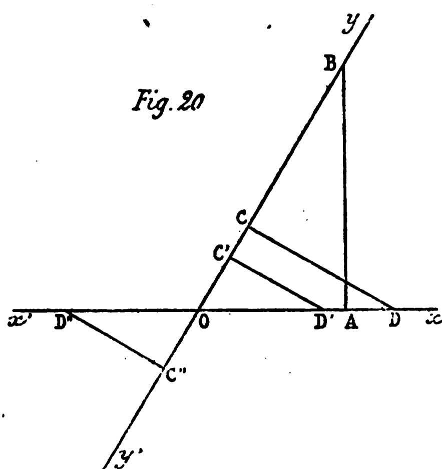
L'expression de l'égalité de deux rapports est une *proportion géométrique*.

On appelle *progression géométrique* une suite de grandeurs telles que le rapport de chacune d'elles à la précédente est constant. Ce rapport se nomme *raison*. La progression est croissante ou décroissante suivant que la raison supposée positive est plus grande ou moindre que l'unité.

Les proportions et progressions géométriques, entre les grandeurs, se traduisent naturellement par des relations de même forme entre leurs

valeurs numériques. Mais les dénominations de rapport et de quotient sont synonymes pour les nombres.

On sait que les proportions et les progressions précédentes tirent leur nom du fréquent usage qu'en fait la géométrie. Cette science les applique, en effet, non-seulement aux droites absolues ; mais encore à leurs accroissements positifs ou négatifs, et elle parvient de la sorte à saisir entre certaines figures, assez diverses en apparence, une analogie qui permet de les exprimer par une même relation numérique. Je n'en citerai qu'un exemple, après quoi, je ferai voir que la géométrie ne saurait pénétrer plus avant dans cette voie de généralisation, sans concevoir de nouvelles droites et par suite créer de nouveaux nombres.




Soient donc $xx'$, $yy'$, deux axes quelconques, $o$ leur point d'intersection. On sait qu'en portant sur ces axes à partir de l'origine $o$ quatre droites absolues OA, OB, OC, OD, les droites de la première direction sont directement ou inversement proportionnelles à celles de la seconde, selon que les sécantes AB et CD sont parallèles ou antiparallèles.

Or, cette propriété subsiste quand l'une des sécantes, CD par exemple, se déplace parallèlement à elle-même de manière à prendre une suite de positions telles que C'D', C''D'',... De là résultent une foule de figures offrant entre elles plus ou moins d'analogie, et qui donnent les proportions

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OC'}{OD'} = \frac{OC''}{OD''}$$

Mais si l'on représente par $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, les longueurs OA, OB, OC, OD, $OC' = OC''$, $OD' = OD''$, ces proportions se traduisent par celles-ci :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

et il ne reste plus qu'à désigner d'abord par $\frac{x}{y}$ l'un quelconque des rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$,... puis par $m$ leur valeur commune, pour que ces dernières relations se résument dans la suivante :

$$\frac{x}{y} = m.$$

Ainsi même en n'employant que des droites absolues la géométrie peut représenter par une seule formule toutes les figures que nous venons de considérer.

Cependant deux positions de la sécante mobile symétriques par rapport à l'origine O, telles que C'D' et C"D", donnant chacune avec AB la proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$$

celle-ci ne détermine pas une de ces positions plutôt que l'autre : de là, certaine ambiguïté qui n'est pas sans inconvénient. Mais pour faire disparaître cette ambiguïté que faut-il ? Simplement tenir compte de toutes les particularités de la figure en regardant les droites OA, OB, OC, OD, OC', OD', comme positives et OC", OD", comme négatives.

En effet, les sécantes AB et C'D' pour lesquelles subsiste la proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$$

se distinguent nettement alors des sécantes AB et C"D" qui donnent

$$\frac{a}{b} = \frac{-e}{-f}$$

Et, comme on n'en a pas moins la suite de rapports égaux

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{-e}{-f}$$

rien n'empêche de résumer, ainsi qu'on l'a fait plus haut, ces diverses proportions dans la formule

$$\frac{x}{y} = m$$

Cet exemple montre déjà que les droites positives et négatives l'emportent sur les droites absolues comme moyen de généralisation. Malheureusement elles deviennent insuffisantes à leur tour quand il s'agit de pousser jusqu'à ses dernières limites l'accord de la géométrie et de l'algèbre. Les proportions elles-mêmes vont nous en offrir la preuve.

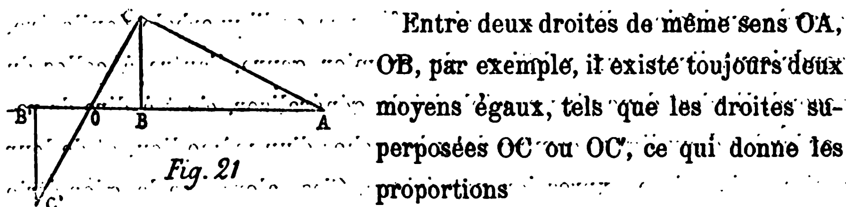


Fig. 21

Entre deux droites de même sens OA, OB, par exemple, il existe toujours deux moyens égaux, tels que les droites superposées OC ou OC', ce qui donne les proportions

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OB} \qquad \frac{OA}{OC'} = \frac{OC'}{OB}$$

et de même, entre deux droites de sens contraires OA et OB', il existe toujours deux moyens symétriques, c'est-à-dire de même longueur mais non de même sens, tels que OC et OC' ou OC' et OC, ce qui s'écrit

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC'}{OB'} \qquad \frac{OA}{OC'} = \frac{OC}{OB'}$$

Mais ces dernières proportions ne peuvent, ni avec des nombres absolus, ni avec des nombres positifs ou négatifs, se résumer dans la même formule que les premières.

En effet, qu'on désigne par $a$, $b$, $c$, les longueurs OA, OB = OB', OC = OC', on a d'un côté

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \qquad \frac{a}{-c} = \frac{-c}{b}$$

de l'autre

$$\frac{a}{c} = \frac{-c}{-b} \qquad \frac{a}{-c} = \frac{c}{-b}$$

Or, si les deux premières relations peuvent se remplacer par celle-ci

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

il ne saurait évidemment en être de même des deux autres.

Cependant il peut se faire que deux lignes offrant entre elles la plus grande analogie, telles que la circonférence et l'hyperbole équilatère, conduisent l'une aux relations du premier genre, l'autre à celles du second. Il n'est donc plus possible ici de généraliser, c'est-à-dire de regarder les deux lignes comme deux branches d'un même lieu, et de leur assigner la même expression numérique. C'est alors que la géométrie se sépare de l'algèbre, la première ne pouvant plus aller en avant de son pas ferme et assuré, la seconde se gardant bien de s'arrêter pour si peu. Il est vrai que celle-ci ne se tire guère d'embarras ; car si, dans sa promptitude à s'affranchir de toute espèce de restriction, elle convient de regarder

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

comme une égalité numérique quelles que soient les valeurs de $a$ et de $b$, dès que ces valeurs sont de signes contraires, elles ne trouve pour $x$ que des symboles dénués de sens, et nécessitant de nouvelles conventions pour s'interpréter géométriquement.

Rien de plus facile cependant que d'éviter ces écueils et d'offrir en même temps à la géométrie de nouveaux moyens de généralisation. Mais, pour y parvenir, il faut assigner aux droites absolues un rôle encore plus élevé que celui de parties positives ou négatives : c'est ce que je vais faire. A peine ai-je besoin d'ajouter que cette manière de procéder sera suffisamment justifiée, si je prouve que sans amener de

complication dans les figures, comme on pourrait le craindre au premier abord, elle conduit à la résolution de deux problèmes jusqu'ici réputés impossibles, savoir : 1° la réalisation de la continuité géométrique entrevue par Monge et Poncelet; 2° l'affranchissement pour l'algèbre des règles conventionnelles et des êtres de raison qu'elles entraînent à leur suite.

La conception fondamentale sur laquelle je m'appuie est celle-ci :

Tout *point géométrique*, au lieu d'être simple, est double, c'est-à-dire formé de deux points ordinaires que j'appelle ses *composantes*. Il est dès lors susceptible de présenter deux états distincts, suivant que ses composantes se trouvent superposées ou séparées l'une de l'autre. Dans le premier cas le point géométrique est *réel*, il est *imaginaire* dans le second ; et les deux manières d'être bien caractérisées qu'il peut affecter s'appellent *modes contraires*.

Il est d'ailleurs utile de distinguer dans chaque point une première et une seconde composante : car si cette distinction est de peu d'importance pour les points réels, elle devient indispensable pour les points imaginaires. Deux points de cette dernière espèce sont *conjugués* lorsque la première composante de l'un est la seconde composante de l'autre et réciproquement.

B'. .B

*Fig. 22*

Un point réel, tel qu'on vient de le définir, se représente absolument comme un point ordinaire. Mais pour désigner un point imaginaire, on place une lettre auprès de chacune de ses composantes, et la première lettre indique la première composante. Ainsi (B, B') et (B', B) (*fig.* 22) sont deux points imaginaires conjugués.

Considérée dans sa manière d'être la plus générale, la droite est double comme le point géométrique : en d'autres termes, elle est formée de deux droites simples appelées composantes. Celles-ci sont toujours d'égale longueur ; mais elles peuvent être de même sens ou de sens contraires ; dans le premier cas, la droite est *réelle*, elle est *imaginaire* dans le second.

Ainsi conçue, la droite est susceptible d'être engendrée par un point dont les composantes décrivent des chemins rectilignes égaux tantôt

dans le même sens, tantôt en sens contraires. Les positions initiale et finale du point générateur s'appellent respectivement l'origine et l'extrémité de la droite. Il est en outre utile d'assigner à la droite une première composante, et c'est naturellement celle qu'engendre la première composante du point. D'ailleurs, pour être réelle ou imaginaire, la droite n'en a pas moins un sens qui est toujours celui de sa première composante.

Ces notions admises, voici les particularités que peut offrir la droite.

*Fig. 23*

Si le point générateur est réel, tel que O, et que ses composantes se meuvent dans le même sens, elles engendrent l'une des droites réelles OA, OB, (*fig.* 23) dont la première est positive, la seconde négative, et qui ont chacune leurs composantes superposées. Mais si les composantes du point O

*Fig. 24*

se meuvent en sens contraires, elles donnent naissance à l'une des droites imaginaires O (A, A') et O (A', A) (*fig.* 24) dont la première est positive et la seconde négative.

*Fig. 25*

Quand le point générateur est imaginaire, tel que (O,O') (*fig.* 25) ses composantes peuvent encore se déplacer dans le même sens ou en sens contraires : dans le premier cas, elles engendrent l'une des droites réelles (O, O') (A, A'), (O, O') (B, B'), dont la première est positive et la seconde négative : dans le second cas, elles engendrent l'une des droites

*Fig. 26*

imaginaires (O, O') (C, C'), (O, O') (D, D') (*fig.* 26) qui sont, la première positive et l'autre négative.

En un mot, l'origine d'une droite peut être, ainsi que son extrémité, réelle ou imaginaire, et la droite elle-même est de l'un ou l'autre mode, suivant que ses composantes sont, ou non, d'un même côté par rapport à son origine.

Deux droites sont égales quand on peut les placer l'une sur l'autre, de façon qu'elles aient même origine et même extrémité.

Si l'on porte deux droites l'une à la suite de l'autre, de telle sorte que la seconde ait pour origine l'extrémité de la première, et que par leur

réunion elles forment une autre droite : celle-ci s'appelle leur somme. D'où il suit que la somme de deux droites a pour origine celle de la première et pour extrémité celle de la seconde.

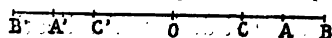


*Fig. 27.*

C'est ainsi que (*fig.* 27) la somme des droites réelles positives OA et AB est OB; que celle des droites réelles OA et AC, l'une positive, l'autre négative est OC; que celle des droites imaginaires O (A, A') et (A, A') (B, B') est O (B, B'); que celle des droites imaginaires O (A, A') et (A, A') (C, C'), l'une positive, l'autre négative est O (C, C'); et qu'enfin celle des droites OA et A (B, C) l'une réelle et l'autre imaginaire est OA + A (B, C).

On voit par ce dernier exemple que la somme de deux droites de modes contraires ne peut se réduire à une droite réelle, non plus qu'à une droite imaginaire. Je donne à cette somme le nom de droite *mixte*.

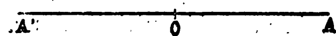


*Fig. 28*

Les changements de mode d'une droite peuvent toujours s'effectuer dans le même ordre; car il suffit pour cela de changer alternativement le sens de ses composantes, et de prendre chaque fois pour première composante celle qui est demeurée fixe. La continuité géométrique semble exiger qu'on se conforme strictement à cette règle, et c'est ce que je ferai désormais. En procédant de la sorte on voit que la droite réelle positive OA, par exemple (*fig.* 28), se transforme d'abord en une droite imaginaire positive O (A, A'), puis en une droite réelle négative OA', puis en une droite imaginaire négative O (A' A), pour revenir finalement à son premier état : et ces mêmes alternatives ont lieu pour toute autre droite.

Afin d'évaluer complétement chaque droite, j'affecte la valeur positive ou négative de sa première composante de la lettre *r*, par exemple, quand la droite est réelle, et de la lettre *i* quand elle est imaginaire. Alors la droite dont la première composante a pour valeur $\pm a$, s'exprime par $\pm ar$ dans un cas, et par $\pm ai$ dans l'autre. J'obtiens ainsi de nouveaux nombres que j'appelle les uns *réels*, les autres *imaginaires*, en les regardant comme étant de modes contraires entre eux. Pour plus de simplicité on peut même, comme je vais le faire, voir des nombres réels dans les nombres positifs et négatifs, et se contenter de la lettre *i* pour caractériser les nombres imaginaires. Rien n'empêche d'ailleurs d'affecter ce

dernier signe à l'expression des droites imaginaires, et de représenter, par exemple, la droite O (A, A') par OA*i*, la droite O (A', A) par OA'*i*.

L'addition des nombres de modes quelconque n'exige pas de définition nouvelle : il en est de même de leur soustraction et de la multiplication d'une droite ou d'un nombre quelconque par un nombre réel.

Comme il revient au même de multiplier une droite par le nombre réel $m$, et de changer le mode du produit, ou de changer d'abord le mode de la droite et de la multiplier ensuite par $m$, on est conduit à voir dans ces opérations successives un cas particulier de la multiplication algébrique ; mais pour avoir le droit de dire qu'on multiplie alors la droite par $mi$ il faut adopter cette définition générale :

La *multiplication algébrique* a pour but de faire sur une grandeur quelconque appelée multiplicande ce qu'on a fait sur l'unité réelle et positive pour obtenir la grandeur exprimée par un nombre appelé multiplicateur.

Multiplier un nombre de mode quelconque par un autre, c'est trouver la valeur du produit obtenu en multipliant par cet autre la droite que représente le premier.

*a et b* étant des nombres positifs ou négatifs on a de cette façon :

$$a \times b = ab$$
$$ai \times b = abi$$
$$a \times bi = abi$$
$$ai \times bi = -ab$$

D'où l'on conclut que le produit de deux nombres quelconques est réel ou imaginaire, selon que ces nombres sont ou non de même mode.

Enfin, rien n'empêche d'exprimer un nombre réel ou imaginaire par une lettre ; et comme il est facile d'étendre soit aux droites soit aux nombres de mode quelconque, la division, les proportions géométriques, ..... etc., je n'ai plus qu'à montrer la possibilité de grouper dans une même formule les relations fournies par deux moyens égaux ou symétriques entre deux droites de sens quelconque.

En se reportant à la *fig.* 21 on voit d'abord qu'entre les droites réelles

et de même sens OA, OB, il existe deux couples de moyens égaux formés des droites réelles OC ou OC', ce qui mène soit aux proportions.

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}} \qquad \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC'}} = \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{OB}}$$

soit aux relations numériques

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \qquad \frac{a}{-c} = \frac{-c}{b}$$

Mais entre les droites réelles et de sens contraires OA, OB', il existe aussi deux couples de moyens égaux formés des droites imaginaires O (C, C') = OC$i$ ou O (C', C) = OC'$i$. En d'autres termes on a les proportions

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}i} = \frac{\mathrm{OC}i}{\mathrm{OB'}} \qquad \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC'}i} = \frac{\mathrm{OC'}i}{\mathrm{OB'}}$$

ou

$$\frac{a}{ci} = \frac{ci}{-b} \qquad \frac{a}{-ci} = \frac{-ci}{-b}$$

Or, puisqu'il est permis de représenter par une lettre un nombre imaginaire aussi bien qu'un nombre réel, ces dernières relations peuvent évidemment se grouper avec les précédentes dans la formule unique

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

où les lettres $a$ et $b$ représentent des nombres réels de signes quelconques et $x$ chacun de leurs moyens égaux.

Ainsi, grâce à la conception des droites de modes contraires, il est toujours possible de trouver deux moyens égaux entre deux droites réelles. Je dis qu'on peut aussi trouver constamment deux moyens symétriques entre de pareilles droites.

En effet, entre les droites réelles et de sens contraires OA, OB′, on a d'abord les moyens symétriques réels OC et OC′, ou OC′ et OC, ce qui donne les proportions

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC'}{OB'} \qquad \frac{OA}{OC'} = \frac{OC}{OB'}$$

ou les relations numériques

$$\frac{a}{c} = \frac{-c}{-b} \qquad \frac{a}{-c} = \frac{c}{-b}$$

Mais, entre les droites de même sens OA, OB, l'une et l'autre réelles, on a aussi les deux moyens symétriques imaginaires O (C, C′) = OC*i* et O (C′, C) = OC′*i* ce qui donne

$$\frac{OA}{OCi} = \frac{OC'i}{OB} \qquad \frac{OA}{OC'i} = \frac{OCi}{OB}$$

ou

$$\frac{a}{ci} = \frac{-ci}{b} \qquad \frac{a}{-ci} = \frac{ci}{b}$$

Or, ces dernières relations peuvent évidemment se grouper avec les premières dans la formule unique

$$\frac{a}{x} = \frac{-x}{-b}$$

où les lettres $a$ et $b$ désignent des nombres réels de signes quelconques et $x$ la valeur commune de leurs moyens symétriques.

Malgré sa simplicité, le double problème que je viens de résoudre a longtemps arrêté les efforts des géomètres. On verra plus loin combien il est fécond en conséquences.

### ÉLÉVATION AUX PUISSANCES.

On appelle *puissance entière* d'un nombre absolu, ce nombre lui-même et tout produit de facteurs égaux à ce nombre. Le *degré* de la puissance est le nombre des facteurs.

La $m^e$ puissance d'un nombre $a$ est le produit de $m$ facteurs égaux à $a$ et se désigne par $a^m$.

### EXTRACTION DE RACINES.

On appelle *racine* d'un nombre absolu, un autre nombre qui, élevé à une certaine puissance, reproduit le premier. Le degré de la puissance est aussi le degré de la racine.

Pour indiquer l'extraction de la racine $n^e$ du nombre $a$ on recouvre ce nombre du signe appelé radical (déformation de la lettre $r$), et le degré $n$ s'écrit en indice, c'est-à-dire entre les branches du radical. Ex. $\sqrt[n]{a}$. Les racines carrées n'ont pas d'indice.

### PUISSANCES ET RACINES SUCCESSIVES.

On peut avoir à effectuer une suite d'élévations aux Puissances ou d'extractions de racines sur un nombre absolu. Il est d'abord facile de s'assurer que $a$ étant un nombre de cette espèce, $m$ et $n$ deux nombres entiers, il revient au même :

1° D'élever $a$ à la puissance $m^e$ et le résultat à la puissance $n^e$ ou d'intervertir l'ordre de ces opérations;

2° D'élever $a$ à la $m^e$ puissance, puis d'extraire la racine $n^e$ du résultat, ou de procéder dans l'ordre inverse;

3° D'extraire la racine $m^e$ de $a$ puis la racine $n^e$ du résultat, ou inversement.

On va de plus reconnaître que ces diverses manières d'opérer se résument aisément dans une même règle pour conduire ensuite à une formule unique.

PUISSANCES ALGÉBRIQUES.

Puisque la $m^e$ puissance d'un nombre absolu $a$ est le produit d'autant de facteurs égaux à ce nombre qu'il y a d'unités dans $m$, on peut dire, avec Cauchy, que $a^m$ procède de $a$ par multiplication comme $m$ de 1 par addition.

Mais la racine $n^e$ du nombre absolu $a$ est un des $n$ facteurs égaux de ce nombre, de même que $\frac{1}{n}$ est une des $n$ parties égales de l'unité. En se laissant guider par l'analogie, on dira donc que cette racine procède de $a$ par multiplication comme $\frac{1}{n}$ de l'unité par addition.

De là, par conséquent la possibilité de regarder l'élévation aux puissances et l'extraction des racines comme deux cas particuliers d'une opération plus générale ayant pour but de faire par multiplication sur un nombre donné ce qu'on a fait sur l'unité par addition pour obtenir un autre nombre appelé degré. Cette opération nouvelle s'appelle naturellement l'*élévation aux puissances algébriques*.

C'est ainsi que la racine $n^e$ de $a$ devient la puissance de $a$ de degré $\frac{1}{n}$ et s'écrit $a^{\frac{1}{n}}$. Dès lors il est facile de ne voir qu'une élévation aux puissances algébriques dans les opérations successives mentionnées plus haut.

En effet, élever $a$ à la puissance $m$, puis à la puissance $n$ ou inversement, c'est opérer sur $a$ par multiplication comme sur l'unité par addition pour former $mn$ : c'est élever $a$ à la puissance $mn$.

De même élever $a$ à la puissance $m$, puis extraire la racine $n^e$ du résultat ou procéder dans l'ordre inverse, c'est opérer sur $a$ par multiplication comme sur l'unité par addition pour former $\frac{m}{n}$, c'est élever $a$ à la puissance $\frac{m}{n}$.

Enfin, extraire la racine $m^e$ de $a$, puis la racine $n^e$ du résultat ou inversement, c'est opérer sur $a$ par multiplication comme sur l'unité par addition pour former $\frac{1}{mn}$ : c'est élever $a$ à la puissance $\frac{1}{mn}$.

Ainsi le degré d'une puissance peut être entier ou fractionnaire; rien ne s'oppose de plus, à ce qu'il devienne incommensurable. En effet, si l'on se donne le nombre incommensurable défini par les fractions $\frac{\alpha}{n}$

et $\frac{m+1}{n}$ infiniment voisines l'une de l'autre, puis, qu'on se propose de trouver un nombre absolu compris entre $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+1}{n}}$, on constate facilement pour cet autre nombre l'existence d'une limite parfaitement déterminée. Mais cette limite procède de $a$ par multiplication comme le nombre incommensurable de l'unité par addition ; elle peut donc s'appeler une puissance algébrique de $a$ d'un degré marqué par le nombre incommensurable lui-même et par suite relever de la définition donnée plus haut.

Cette même définition s'étend également, sans modification aucune, aux cas où le nombre $a$ cessé d'être absolu pour devenir réel ou imaginaire. D'où il suit en particulier que les puissances entières des nombres positifs sont toutes positives, que celles des nombres négatifs sont positives ou négatives selon qu'elles sont de degré pair ou impair, et qu'enfin celles des nombres imaginaires sont aussi d'après leur degré tantôt d'un mode tantôt de l'autre.

Ainsi :

$$(+a)^1 = +a, \quad (+a)^2 = +a^2, \quad (+a)^3 = +a^3, \quad (+a)^4 = +a^4 \ldots$$
$$(-a)^1 = -a, \quad (-a)^2 = +a^2, \quad (-a)^3 = -a^3; \quad (-a)^4 = +a^4 \ldots$$
$$(+ai)^1 = +ai, \quad (+ai)^2 = -a^2, \quad (+ai)^3 = -a^3i, \quad (+ai)^4 = +a^4 \ldots$$

cette dernière propriété s'exprime souvent en disant que

$$i^{4n} = +1 \qquad i^{4n+1} = i \qquad i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i$$

Nous n'avons encore admis que des puissances algébriques de degré positif ; mais si l'on observe d'une part que

$$a \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

d'autre part que

$$1 - 1 - 1 = -1$$

l'analogie conduit encore à dire que $\frac{1}{a}$ procède de $a$ par multiplication comme $-1$ de $+1$ par addition, et de là à regarder $\frac{1}{a}$ comme une puissance de $a$ de degré $-1$, ou plus généralement $\frac{1}{a^m}$ comme une puissance de $a$ de degré $-m$, la transition est facile: car pour étendre au cas actuel la définition qui nous occupe, il suffit de prendre pour point de départ, dans la formation du degré, l'unité positive au lieu de l'unité absolue.

Enfin, en prenant pour ce même point de départ l'unité réelle et positive, on peut aussi concevoir des puissances de degré imaginaire. Mais comme il serait difficile de donner de ces sortes de puissances une idée bien nette sans recourir à des considérations géométriques qui trouveront mieux leur place ailleurs, je me borne à signaler ici la possibilité du fait.

En résumé, l'*élévation aux puissances algébriques* a pour but de faire par multiplication sur un nombre quelconque, ce qu'on a fait par addition sur l'unité réelle et positive pour obtenir un autre nombre quelconque appelé degré; et cette opération générale ainsi définie comprend dans son domaine non-seulement l'élévation aux puissances entières et l'extraction des racines des nombres absolus, mais encore une foule d'opérations analogues. Quand aux divers résultats qu'elle fournit il est clair qu'on peut les grouper tous dans la formule

$$x = a^m$$

$a$ et $m$ étant des nombres entiers fractionnaires ou incommensurables de modes quelconques.

### RACINES ALGÉBRIQUES.

On appelle *Racine algébrique* d'un nombre réel ou imaginaire, tout autre nombre qui, élevé à une certaine puissance reproduit le premier: le degré de la puissance est aussi le degré de la racine.

On démontre en algèbre que toute racine $n^e$ a $n$ valeurs distinctes, et

que les racines imaginaires de degré quelconque sont de même nature que celles du second degré.

En particulier, on a

$$\sqrt{a^2} = \pm a$$
$$\sqrt{-a^2} = \pm ai$$

Si l'on observe que

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2(-1)}$$
$$= a\sqrt{-1}$$

on en conclut que $i$ et $\sqrt{-1}$ peuvent se remplacer mutuellement.

### FORMULES GÉNÉRALES.

Les diverses égalités numériques fournies par des questions analogues peuvent souvent, comme on l'a vu par quelques exemples, être préparées de manière à ne plus différer les unes des autres que par des nombres de signes ou de modes quelconques. Il suffit alors de remplacer, dans l'une de ces égalités numériques, les nombres par des lettres pour obtenir une formule propre à les représenter toutes, et qui prend pour cette raison le nom de *formule générale.*

Parmi les formules générales, les plus simples sont celles qui résultent de la considération soit d'une somme algébrique de droites, soit d'une proportion géométrique entre de pareilles grandeurs. Elles peuvent d'ailleurs se combiner de manière à donner une relation de la forme

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{e+f}{g+h}$$

et cette relation conserve une signification géométrique précise quelles que soient les valeurs des lettres $a$, $b$, $c$,... mais il n'est pas nécessaire de

lui laisser toute sa généralité lorsqu'on veut rester dans les limites ordinaires de l'algèbre: car il suffit alors de considérer une proportion telle que

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

dont les moyens égaux ou inégaux peuvent seuls devenir imaginaires. En multipliant membre à membre des relations de cette dernière forme, après y avoir fait passer au besoin tous les termes d'un membre dans l'autre, on s'élève ensuite à des formules générales de plus en plus compliquées.

### ÉQUATIONS.

*Mettre en nombres* une formule générale, c'est la remplacer par l'une quelconque des égalités numériques qu'elle représente. Il peut se faire toutefois que cette mise en nombres ne soit que partielle, et qu'après avoir assigné des valeurs arbitraires à plusieurs des lettres qui entrent dans la formule, on se propose de déterminer les valeurs correspondantes des autres lettres. La formule générale prend alors le nom d'*Équation*: les lettres dont la valeur est à calculer en sont les *inconnues*. *Résoudre* une équation, c'est déterminer les valeurs des inconnues qui la vérifient, c'est-à-dire qui la transforment en une égalité numérique.

Parmi les équations à une inconnue $x$, il en est un grand nombre qui se ramènent à la forme

$$ax^m+bx^{m-1}+\ldots\ldots+ex+f=o$$

l'exposant $m$ étant un nombre entier et positif, et les coefficients $a$, $b$,... $e$, $f$, des nombres réels. Une relation de ce genre se nomme équation algébrique de degré $m$ en raison de la plus haute puissance de $x$ qu'elle renferme.

On a vu que la considération de quatre droites proportionnelles conduit à une relation numérique de la forme

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

dont les extrêmes, supposés réels, sont de signes quelconques, et dont les moyens égaux ou inégaux sont tantôt réels, tantôt imaginaires, Or, il est évidemment possible de regarder au besoin ces droites comme des sommes algébriques, ayant toutes leurs parties réelles, à l'exception d'une seule qui, ne l'étant pas nécessairement, reste indéterminée et se désigne par $x$. La relation précédente devient alors une égalité de rapports entre des fonctions linéaires de $x$, et il suffit de la débarrasser de ses dénominateurs pour qu'elle prenne la forme d'une équation algébrique du premier ou du second degré par rapport à cette inconnue. Ces sortes d'équations multipliées membre à membre mènent ensuite à d'autres d'un degré plus élevé, mais qui ne cessent pas d'être vérifiées par des nombres de modes quelconques.

Réciproquement, toute équation algébrique $f(x) = o$ n'admet pas d'autres solutions que les nombres réels, imaginaires ou mixtes, tels qu'on les a précédemment définis.

En effet :

1° L'équation générale du premier degré à une inconnue étant de la forme

$$ax = bc$$

on voit que $x$ représente une quatrième proportionnelle à trois droites réelles et qu'elle ne peut recevoir par suite que des valeurs positives ou négatives ;

2° L'équation générale du second degré à une inconnue est

$$x^2 - 2ax = \pm b^2$$

Or, l'addition de $a^2$ aux deux membres de cette équation la transforme en

$$(x - a)^2 = a^2 \pm b^2$$

et comme $a^2 \pm b^2$ peut se remplacer par un produit de deux facteurs réels, on en conclut que $x - a$ est l'expression commune de deux moyens égaux entre deux droites réelles de même sens ou de sens contraires: en sorte que $x$ ne peut recevoir que des valeurs réelles ou mixtes, celles-ci devenànt purement imaginaires quand $a$ est nul;

3° Enfin on démontre en algèbre que l'équation

$$ax^m + bx^{m-1} + \ldots\ldots + ex + f = o$$

n'est satisfaite que par les solutions des équations du premier et du second degré.

Ainsi, l'algèbre ne comporte pas d'autres nombres que ceux qu'on a précédemment définis.

L'importance de cette réciproque ne saurait échapper à personne. Il faut en conclure, en effet, qu'on arrive au même but, soit qu'on se borne, comme on le fait habituellement, à créer de purs symboles en vue de généraliser les formules algébriques, soit qu'on s'appuie comme plus haut sur des considérations géométriques fort simples pour définir les nombres de signes ou de modes quelconques. Or, la seconde manière de procéder n'a-t-elle pas sur l'autre l'avantage de rendre l'algèbre plus claire, en la présentant sous son véritable jour, c'est-à-dire comme l'écriture des propriétés de la grandeur ? Je dois ajouter que la géométrie gagne beaucoup elle-même à l'introduction des droites de modes contraires, et que tel est probablement le seul moyen d'assurer à cette science un degré de généralité comparable à celui de l'algèbre.

### PROBLÈMES GÉOMÉTRIQUES RÉSOLUS PAR L'ALGÈBRE.

Lorsqu'on veut soumettre au calcul un problème de géométrie, on en représente respectivement les données et les inconnues par les pre-

mières et les dernières lettres de l'alphabet, puis on écrit algébriquement l'énoncé du problème, et de là résultent des équations en nombre suffisant pour permettre de le résoudre, si toutefois il est déterminé.

Mais cette traduction du problème en langage algébrique n'est pas toujours d'une fidélité parfaite : car il arrive souvent que deux questions dont l'une est plus générale que l'autre s'expriment par la même équation.

En effet, dès qu'il s'agit de mettre en équation le problème, on n'examine pas s'il offre ou non plusieurs cas distincts. L'habitude est de ne l'envisager que sous un seul aspect, celui qui, d'après l'énoncé de la question, se présente immédiatement à l'esprit. Bref, au lieu d'embrasser le problème dans son ensemble, on en considère un cas particulier ; ce qui dispense de tenir compte des sens ou des modes opposés que peut affecter la grandeur continue. Il en résulte que les inconnues aussi bien que les données s'expriment par des nombres absolus, et que les équations auxquelles on arrive ne sont que des égalités établies entre de pareils nombres. Cependant rien ne distingne ces équations des relations générales de même forme ; et, comme pour résoudre les unes et les autres, on se sert des mêmes procédés, la confusion est ici tellement naturelle qu'on ne songe pas à l'éviter. De là le désaccord apparent de la géométrie et de l'algèbre quand il s'agit d'interpréter les solutions fournies par cette dernière. Au reste, bien qu'on ne l'aborde en quelque sorte que d'un seul côté, le problème mis en équation peut offrir assez de cas pour que toutes les solutions algébriques soient admissibles. Mais le plus souvent ce problème est soumis à certaines restrictions qu'on néglige d'écrire, et qui proscrivent d'avance certaines valeurs des inconnues ; tout se réduit donc à faire alors un bon choix parmi les solutions trouvées.

Il est clair, par exemple, que s'il est impossible de voir dans les inconnues du problème autre chose que des grandeurs absolues, on ne doit en chercher les valeurs que parmi les solutions positives : encore celles-ci peuvent-elles ne pas convenir toutes, par suite des restrictions auxquelles le problème est implicitement assujetti, mais si rien n'empêche de regarder les inconnues comme des accroissements positifs ou

négatifs d'autres grandeurs, toutes les solutions réelles sont admissibles, pourvu qu'on laisse à la question la généralité qu'elle comporte. Enfin, lorsque ces mêmes inconnues sont assimilables aux accroissements de droites réelles ou imaginaires, il peut se faire qu'on n'ait à rejeter aucune solution, quel qu'en soit le mode.

Comme il n'est pas inutile d'éclaicir au moins par un exemple les considérations qui précèdent, j'emprunte à la *Géométrie de Position* (¹) le problème si connu dont une des solutions embarrassait d'Alembert et qui, selon Carnot, fournit un argument sans réplique contre la doctrine des grandeurs positives et négatives.

« Voici, dit ce dernier géomètre, un exemple aussi simple que frappant, qui seul suffit pour renverser toute cette doctrine :

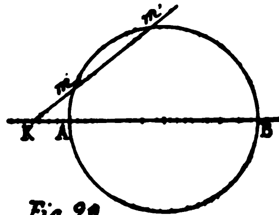


Fig. 29

« D'un point K (*fig.* 29), pris hors d'un cercle donné, soit proposé de mener une droite K$mm'$, telle que la portion $mm'$, interceptée dans le cercle soit égale à une droite donnée.

« Du point K, et par le centre du cercle menons une droite KAB qui rencontre la circonférence en A et B. Supposons KA $= a$, KB $= b$, $mm' = c$, K$m = x$. On aura donc par les propriétés du cercle

$$ab = x(c + x) = cx + x^2$$

donc

$$x^2 + cx - ab = o$$

ou

$$x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$$

---

(¹) Introduction.

$x$ a deux valeurs : la première, qui est positive, satisfait sans difficulté à la question ; mais que signifie la seconde, qui est négative ? Il paraît qu'elle ne peut répondre qu'au point $m'$, qui est le second de ceux où K$m$ coupe la circonférence ; et, en effet, si l'on cherche directement K$m'$, en prenant cette droite pour l'inconnue $x$, on aura

$$x\,(x - c) = ab$$

ou

$$x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$$

dont la valeur positive est précisément la même que celle qui s'était présentée dans le premier cas avec le signe négatif. Donc, quoique les deux racines de l'équation

$$x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$$

soient l'une positive et l'autre négative, elles doivent être prises toutes les deux dans le même sens par rapport au point fixe K. Ainsi, la règle qui veut que ces racines soient prises en sens opposés porte à faux. Si au contraire le point fixe K était pris sur le diamètre même AB et non sur le prolongement, on trouverait pour $x$ deux valeurs positives et cependant elles devraient être prises en sens contraires l'une de l'autre. La règle est donc encore fausse pour ce cas.

« Si l'on dit que ce n'est pas ainsi qu'il faut entendre ce principe, que les racines positives et négatives doivent être prises en sens opposés, je demanderai comment il faut l'entendre ? et j'en conclurai par là même qu'il faut une explication pour empêcher qu'il ne soit pris dans l'acception la plus naturelle. Il suit que ce principe est obscur et vague. »

A ces arguments de d'Alembert, Carnot en ajoute d'autres, qui sont loin d'avoir la même force : aussi, me bornerai-je à répondre aux premiers.

D'après la mise en équation du problème, l'écriture

$$x(c+x)=ab$$

ou

$$x^2+cx=ab,$$

exprime que le produit des droites absolues $x$ et $c+x$ est égal à celui des droites absolues $a$ et $b$. Mais, si, pour trouver la valeur de $x$, on ajoute aux deux membres de l'équation précédente le terme positif $\frac{c^2}{4}$, on obtient l'équation

$$\left(x-\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}+ab$$

qui, tout en paraissant n'être qu'une transformation de la proposée, est plus générale que celle-ci : car elle peut représenter à la fois les deux types d'égalités numériques

$$x(c+x)=ab$$
$$-x(c-x)=ab$$

et donne en conséquence pour $x$ les valeurs

$$x'=-\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}+ab}$$
$$x''=-\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}+ab}$$

dont l'une est positive et l'autre négative.

Or, puisque par hypothèse $x$ ne désigne qu'une droite absolue, la so-

lution positive $x'$; est évidemment celle qu'on doit adopter tout d'abord : d'où l'on conclut

$$\text{K}m' = c + x' = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + ab}$$

Quant à la solution négative $x''$ qui survient incidemment dans le calcul, il est permis de l'interpréter si le problême offre un second cas où l'inconnue puisse être considérée comme l'accroissement négatif d'une autre droite. Mais, d'après l'énoncé de la question, ce second cas ne saurait exister. Donc, il faut ici rejeter purement et simplement la solution négative et reconnaître que le rapprochement fait par d'Alembert, entre la valeur absolue de cette racine et celle de K$m'$, ne prouve absolument rien.

Il est presque surperflu d'ajouter que si l'on désigne par $x$ la droite absolue K$m'$, on ne doit assigner à $x$ d'autre valeur que la racine positive de l'équation $x\,(x - c) = ab$ qui répond à cette hypothèse.

Admettons maintenant que la droite indéfinie K$mm'$ étant fixe, on veuille faire passer par les points également fixes A et B une circonférence interceptant sur cette droite une corde de longueur donnée $mm'$.

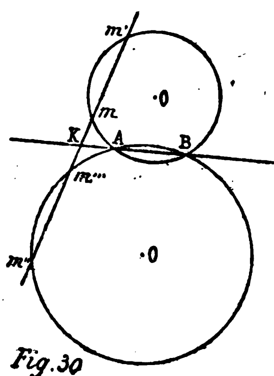


Fig. 30

Bien que ce nouveau problême diffère assez notablement de l'autre, il s'exprime par la même équation.

En effet, si l'on désigne encore par $x$ la droite absolue K$m'$, en conservant les notations adoptées plus haut, on a toujours par les propriétés de la circonférence

$$x\,(x + c) = ab$$

ou

$$x^2 + cx = ab$$

et cette équation ayant deux racines de signes contraires, il suffit de prendre K$m$ égale à la racine positive pour obtenir la circonférence $o$ qui répond à la question.

Mais le problème actuel présente un second cas, puisqu'il est évidemment possible de construire une autre circonférence $O'$ interceptant sur le prolongement de K$m$ une longueur $m''m'''$ égale à $c$. Or, K$m''$ et K$m'''$ sont des droites négatives par rapport à K$m$; et, comme en tenant compte de leur sens, on a

$$Km''' = Km'' + m''m'''$$

on en conclut

$$Km'' (Km'' + m''m''') = KA \times KB$$

En d'autres termes, K$m''$ a pour valeur la racine négative de l'équation proposée. Ainsi le second problème est aussi général que l'équation qui sert à le résoudre. On peut observer de plus que la longueur de K$m''$ est la même que celle de K$m'$; mais ce n'est là qu'une coïncidence fortuite qui ne saurait autoriser à prendre une des deux droites pour l'autre. Remarquons aussi que le second problème est toujours possible, quelle que soit la valeur de la droite absolue $mm'$, tandis qu'il n'en est pas de même du premier, où l'on suppose expressément cette droite moindre que le diamètre de la circonférence.

En résumé, pour mettre en équation les deux problèmes qui précèdent, on ne s'est préoccupé que d'une propriété qui leur est commune et l'on a simplement écrit dans les deux cas que les droites KA, KB, K$m$ et K$m'$ sont réciproques. L'algèbre n'a donc pas traduit aussi fidèlement un des énoncés que l'autre, et telle est la véritable cause de l'ambiguïté des solutions du premier problème. Au reste, il suffit, comme on vient de le voir, d'un peu d'attention pour faire disparaître cette ambiguïté. Les objections de d'Alembert étaient donc mal fondées dans cette circonstance; et l'on verrait facilement qu'elles le sont encore moins quand on suppose le point K pris à l'intérieur du cercle.

QUANTITÉS COMPLEXES.

La conception des droites de modes contraires n'est pas la seule qu'on ait proposée pour légitimer ou éclaircir les règles du calcul algébrique; il en est une autre, qui peut rendre d'utiles services; c'est celle des *quantités complexes*. Bien que ces sortes de grandeurs n'aient pas justifié toutes les espérances qu'elles faisaient d'abord concevoir, elles n'en sont pas moins devenues, entre les mains d'habiles géomètres, un précieux moyen d'investigation. Il est donc utile de montrer que, non-seulement elles ne sont pas incompatibles avec les droites de modes contraires, mais qu'elles s'en déduisent aisément.

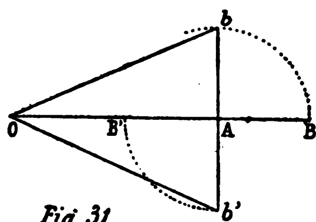


*Fig. 31*

Soient OA + AB*i* et OA + AB'*i* deux droites mixtes conjuguées ayant pour valeurs respectives $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ : le produit de ces valeurs étant $\alpha^2 + \beta^2$, si l'on mène par le point A une perpendiculaire à OA, et qu'on rabatte sur cette perpendiculaire AB ou AB' suivant A*b* ou A*b'* ou a O*b* = O*b'* = $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Cela posé, toute droite O*b* ou O*b'* peut se définir : 1° par son module $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; 2° par son argument, c'est-à-dire par l'angle qu'elle fait avec la direction fixe OA, tracée dans son plan et partant de son origine O. Ainsi définie la droite O*b* ou O*b'* se nomme *Quantité Géométrique*. On admet de plus qu'elle est réelle quand son argument est zéro ou $\pi$, et imaginaire quand cet argument est $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$. Dans tout autre cas la quantité géométrique est mixte; parce qu'étant susceptible de se décomposer en deux autres quantités l'une réelle, l'autre imaginaire, elle est considérée comme la somme de ses composantes. On l'appelle plus spécialement alors une *Quantité Complexe*.

Mais, puisqu'on a par hypothèse OA $= \alpha$ et A*b* = AB' $= \beta$, il est clair que les quantités complexes O*b* et O*b'* ont respectivement pour valeur $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ elles se déduisent donc par une construction simple des droites mixtes OA + AB*i* et OA + AB'*i*.

Ainsi, les quantités complexes se rattachent facilement aux droites de modes contraires, malheureusement elles sont loin d'en avoir toute

la généralité et ne peuvent jouer en géométrie supérieure comme en géométrie analytique qu'un rôle secondaire. Mais comme elles ont fourni des démonstrations algébriques d'une extrême élégance, rien ne prouve qu'on ne doive pas continuer de s'en servir. L'essentiel est que ces deux moyens d'investigation puissent se concilier au besoin.

J'ai suffisamment indiqué, je pense, le rôle important que les droites de modes contraires peuvent jouer en algèbre. Il me reste à parler de leur plus beau privilége, peut-être, c'est-à-dire des moyens de généralisation qu'elles procurent à la science de l'étendue concuremment avec les autres parties réelles ou imaginaires des figures.

---

# TROISIÈME PARTIE

## CORRÉLATION DES FIGURES.

**SOMMAIRE** : Définition nouvelle de la Corrélation des figures. — Essais antérieurs. — Influence de la Géométrie cartésienne. — Vues de Leibnitz. Œuvres de Monge. — Principe des Relations contingentes. — Géométrie de Position, de Carnot. — Théorie des quantités directes et inverses. — Travaux de Poncelet. — Principe de continuité. — Doctrine des cordes idéales. — Travaux de M. Chasles. — Caractères de ses démonstrations. — Introduction du principe des signes en géométrie. — Travaux de M. Marie. — Sa théorie des variables imaginaires ne s'appuie, comme celle des cordes idéales, que sur des rapprochements entre courbes réelles. — La doctrine des quantités complexes ne peut servir à compléter ni la géométrie supérieure, ni le système de coordonnées de Descartes. — Les nouvelles manières d'être que j'assigne aux droites satisfont à toutes ces exigences, sans amener de complication dans les figures et se prêtent aux mêmes applications que les quantités complexes.

Toute figure géométrique peut, à l'aide de transformations insensibles, se convertir en d'autres qui en diffèrent soit par la valeur absolue ou la situation respective de leurs parties, soit par des caractères d'un ordre plus élevé. De là, la possibilité d'établir en géométrie des groupes où les figures dérivent naturellement les unes des autres, et d'exprimer ensuite, par les mêmes formules, les propriétés générales de ces figures. Mais pour atteindre ce double but il ne suffit pas de s'en tenir à la conception des grandeurs absolues, telles que les droites, les angles, etc., ni même de reconnaître à ces grandeurs deux sens opposés : il faut encore leur assigner, comme aux points eux-mêmes, deux modes contraires, c'est-à-dire deux manières d'être, qui tout en continuant de s'appeler, d'après l'habitude reçue, l'une réelle l'autre imaginaire, n'en

constituent pas moins pour chaque espèce de conceptions géométriques deux états bien définis et coexistants mais parfaitement distincts l'un de l'autre.

Grouper ensemble les figures qui ne diffèrent que par la valeur absolue, le sens ou le mode de leurs parties, les rapporter toutes à l'une d'elles prise pour terme de comparaison et comprendre dans les mêmes formules les propriétés qui leur sont communes, c'est ce que j'appelle *Établir la Corrélation des figures.*

Afin de mieux indiquer en quoi cette définition diffère de celles qui l'ont précédée, j'exposerai d'abord aussi brièvement que possible l'état présent de la question.

Descartes, on le sait, réussit le premier à représenter, par une même équation, non-seulement les diverses parties d'une courbe, mais toute une famille de courbes en apparence fort étrangères les unes aux autres, telles que la circonférence, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole. Il y parvint, comme je l'ai déjà fait voir, en interprétant constamment par des droites les valeurs absolues ou même positives et négatives des fonctions algébriques. Mais il ne put assigner aucune signification concrète aux racines imaginaires des équations. Toutefois, l'alliance qu'il établit de la sorte entre l'algèbre et la géométrie ne tarda pas à porter de nouveaux fruits et concourut puissamment aux progrès des deux sciences.

Selon d'Alembert, Leibnitz entrevoyait déjà la nécessité d'exprimer en langage algébrique la situation aussi bien que la valeur absolue des diverses parties d'une figure. Il est vrai que Poinsot, dans son étude sur les polygones étoilés, déclare n'avoir rien trouvé dans les œuvres du géomètre allemand qui justifie cette assertion. Quoi qu'il en soit, si la question fut aussi nettement posée par Leibnitz, il est incontestable qu'elle n'a pas encore reçu de réponse satisfaisante puisque, jusqu'à présent, on n'a su ni voir dans les symboles algébriques l'expression générale des propriétés de l'étendue, ni donner à la géométrie supérieure une base plus solide que le principe des *Relations contingentes* ou celui de *continuité*. Cependant, si les grands géomètres qui se sont occupés de ce double problème n'ont pas eu le bonheur de le résoudre, ils en ont, sans contredit, préparé la solution.

La prédilection dont le *système de coordonnées rectilignes* fut longtemps l'objet, pouvait nuire aux progrès de l'analyse ancienne. Il n'en fut rien cependant, tant il est vrai qu'une branche des mathématiques ne saurait se développer sans concourir à l'accroissement de toutes les autres. Déjà même, du temps de Descartes, Desargues et Pascal avaient agrandi le champ des spéculations géométriques ; mais ce fut surtout par son commerce intime avec l'algèbre que la géométrie pure apprit à briser les obstacles qui s'opposaient à son essor. Les écrits où se manifeste pour la première fois cette heureuse tendance sont assurément ceux de Monge. On sait, en effet, que ce grand mathématicien après avoir pris pour base d'une démonstration, certaines parties accessoires d'une figure, considérée dans son état le plus général, ne fait pas difficulté d'étendre, s'il y a lieu, le théorème au cas où ces parties deviennent imaginaires, c'est-à-dire, en prenant le mot dans son ancienne acception, cessent d'exister. Or, il ne puise évidemment une pareille confiance que dans l'examen des équations relatives à cette figure : ce n'est donc plus là dans toute sa pureté l'analyse si réservée des Anciens ; c'est une méthode moins rigoureuse peut-être, mais plus féconde à laquelle M. Chasles propose de donner le nom de méthode des *Relations contingentes*.

Bientôt après, Carnot, visant plus haut encore, semble demander à la géométrie le secret de certaines transformations algébriques ; à la vérité, sa doctrine des quantités *directes* et *inverses* ne parvient pas à supplanter celle des quantités de signes contraires ; mais il n'en a pas moins la gloire de jeter les premiers fondements du principe de la *Corrélation des figures.*

« Leibnitz, dit-il [1], voulait qu'on fit entrer dans l'expression des condi-
« tions d'un problème géométrique la diversité de positions des parties
« correspondantes des figures comparées, afin qu'en les séparant par un
« caractère bien distinctif on pût les isoler parfaitement dans le calcul.
« Or, cette diversité de positions s'exprime souvent par de simples mu-
« tations de signes, et c'est précisément la théorie de ces mutations

(1) *Géométrie de Position.* — Introduction.

« qui fait l'objet essentiel des recherches que j'ai en vue et que je « nomme *Géométrie de position.* »

Pour atteindre son but, Carnot commence par établir toutes les relations possibles entre les parties d'une figure qu'il prend pour terme de comparaison et qu'il appelle *figure primitive;* puis il dresse des tableaux analogues pour les figures qui s'en rapprochent le plus. Celles-ci sont en *Corrélation directe* avec la figure primitive quand elles en diffèrent seulement par les valeurs absolues de leurs parties; en *Corrélation inverse* lorsqu'elles donnent lieu, dans les formules, à quelques mutations de signes; enfin, en *Corrélation imaginaire* ou *complexe,* si, dans ces mêmes formules les valeurs primitives se trouvent multipliées par $\sqrt{-1}$, ou que certaines de leurs fonctions, leurs carrés, par exemple, changent de signes.

Cela fait, pour se rendre compte des mutations de signes auxquelles donne lieu telle ou telle figure corrélative, Carnot la regarde comme née de la figure primitive en vertu d'une transformation opérée par degrés insensibles, qui ne change rien aux bases générales de la première construction, mais qui modifie seulement les positions respectives, en faisant passer au-dessus ce qui était au-dessous, ou à droite ce qui était à gauche. De ce mouvement graduel il résulte que telle grandeur, qui se trouvait d'abord plus petite que telle autre, devient plus grande, et réciproquement. Or, à en croire Carnot, c'est de là uniquement et non de ce que ces grandeurs seraient opposées l'une à l'autre que naît le principe général de la mutation des signes qui doit avoir lieu dans les formules de la figure primitive pour qu'elles deviennent applicables à la figure transformée ou corrélative. Aussi rejette-t-il jusqu'à la notion des quantités positives et négatives pour lui substituer celle des quantités *directes* et *inverses.* Ces dernières sont les différences de deux quantités absolues dont l'une est d'abord plus grande, puis moindre que l'autre. Comme toute inversion dans l'inégalité de ces quantités entraîne une mutation de signes dans le tableau de corrélation, Carnot en conclut que, pour rendre les formules de la figure primitive immédiatement applicables aux figures inversement corrélatives, il suffit de changer le signe des quantités directes qui deviennent inverses : et tel

est le point le plus saillant du principe de la corrélation des figures, puisque l'auteur garde un silence à peu près absolu sur la corrélation imaginaire ou complexe. Mais, ainsi que le fait observer M. Chasles [1] « à vrai dire, ce principe n'est pas démontré; les développements dans lesquels l'auteur est entré à plusieurs reprises, tant dans la géométrie de position que dans des dissertations spéciales, ne forment que de puissantes inductions qui ne constituent pas une démonstration primordiale, absolue, et, à la rigueur, il faudrait justifier dans chaque question le passage d'une figure à une autre. »

Poncelet, qui sut ouvrir à la géométrie de nouvelles voies, tout en suivant les traces de Monge et de Carnot, persiste à croire avec ce dernier que les signes $-1$ et $\sqrt{-1}$, pris isolément, ne sauraient dériver *a priori* d'aucune considération purement géométrique; mais la manière dont il envisage la corrélation des figures, l'axiome qu'il cherche à établir sous le nom de *principe de continuité*, la doctrine des *cordes idéales* sont autant d'aperçus profonds qui, sans apporter la réponse à des problèmes ardus, tendent à circonscrire, à préciser ces problèmes.

« Notre sujet, dit-il [2], ayant quelque analogie avec celui de la *Géo-* « *métrie de position* de M. Carnot, nous aurons souvent besoin de com- « parer une même figure avec toutes celles qui peuvent être censées en « résulter par le mouvement progressif et continu des parties qui y « entrent sans violer la liaison et la dépendance primitivement établies « entre elles. Nous appellerons, avec cet illustre géomètre, *figure primi-* « *tive*, celle à laquelle on compare toutes les autres qui en dérivent; « celles-ci, à leur tour, seront appelées en général les *Corrélatives* de la « première: cette correspondance particulière entre deux systèmes « sera désignée en outre par le mot de *Corrélation*.

« Nous distinguerons trois degrés de corrélation, suivant la plus ou « moins grande analogie que peuvent conserver entre eux le système « primitif, et le système dérivé. Pour tous, nous admettrons que le

---

(1) *Géométrie supérieure*, Préface.

(2) *Propriétés projectives des figures.*

« mouvement par lequel on suppose que la figure primitive ait pu se
« changer en sa dérivée, soit réel et géométriquement possible.

« Cela posé, nous dirons que la corrélation est directe, toutes les fois « que les figures corrélatives sont composées d'un même nombre de « parties semblables, quant à leur nature, se correspondant chacune à « chacune, et disposées dans le même ordre à l'égard les unes des autres : « dans cette situation elles ne différeraient évidemment que par la gran- « deur absolue de ces parties et nullement par leur nature et leur posi- « tion relative.

« Nous dirons que la corrélation est au contraire *indirecte* ou *inverse*, « toutes les fois que le déplacement nécessaire à opérer dans une de ces « figures, pour la rendre identique avec sa corrélative, changerait l'ordre, « la disposition de quelques-unes des parties dont elle se compose, sans « toutefois en changer la nature.

« Enfin, la corrélation pourrait être telle que, en vertu du déplace- « ment toujours réel de certaines parties de la figure primitive, une ou « plusieurs autres parties de cette figure devinssent, dans la corrélative, « imaginaires, de réelles qu'elles étaient, ou réciproquement ; c'est-à-dire « telles que certaines distances, certains points cessassent d'exister « d'une manière géométrique. Nous nommerons cet état de deux figures « *Corrélation idéale*.

« Si la figure primitive renfermait une droite et un cercle, par exem- « ple, et que cette droite rencontrât d'abord la circonférence de ce « cercle en deux points, on pourrait concevoir qu'elle se détachât en- « suite du cercle par un mouvement continu, alors les deux points dont « il s'agit cesseraient d'être réels aussi bien que la direction des rayons « qui leur correspondent ; et la nouvelle figure serait, d'après ce qui « précède, en corrélation idéale avec la première.

« Ces définitions ne cadrent que jusqu'à un certain point avec celles « de la *Géométrie de position* ; elles ne concernent à proprement parler « que la corrélation de *situation* des figures, tandis que les autres con- « cernent la corrélation des *signes* qui affectent les grandeurs qui en- « trent dans les formules appartenant à ces figures. Il ne faut pas con- « fondre ces deux sortes de corrélation ; pour qu'il fût permis de le

« faire, il faudrait qu'on eût démontré à l'avance d'une manière absolue « et rigoureuse, que chaque espèce de corrélation de situation entraîne « nécessairement l'espèce correspondante de corrélation de signes, ce « qui n'a pas lieu jusqu'à présent. »

Je ne puis m'empêcher d'appeler en passant l'attention sur cette dernière remarque où Poncelet définit avec tant de netteté le grand problème qui nous occupe, bien qu'il ne semble pas entrevoir la possibilité de le résoudre.

En résumé, par figures corrélatives il faut entendre, avant tout, suivant Carnot, celles qui conduisent à des relations numériques analogues, et, suivant Poncelet, celles qui dérivent les unes des autres par de simples transformations géométriques. Cette seconde manière d'envisager la corrélation des figures aurait son importance si Poncelet y consacrait franchement les ressources de la géométrie ordinaire ; mais le parti bien arrêté chez lui de n'employer que des grandeurs absolues l'empêche de suivre cette voie. La comparaison qu'il fait de l'analyse ancienne, ou si l'on veut, de la géométrie d'Euclide avec l'analyse algébrique lui montre que les conceptions de l'une se bornent à l'état particulier du système que l'on considère, tandis que celles de l'autre s'étendent à tous les états possibles de ce système. D'où il croit pouvoir conclure que la géométrie ordinaire ne possède en elle-même aucun moyen de généraliser et qu'elle doit en emprunter le principe à toute autre doctrine. A quoi donc attribuer, d'après lui, l'extension dont cette science paraît douée dans les écrits modernes ? Uniquement à l'habitude admise depuis Monge d'y appliquer le calcul algébrique, témoin la géométrie de position et même les considérations relatives aux infiniments petits. Mais ce principe d'extension, qui règne en géométrie, ne le retrouve-t-on pas jusqu'en algèbre, où il est également gratuit, puisqu'il revient en définitive à admettre que les opérations élémentaires s'étendent à tous les états, même imaginaires, des lettres que ces opérations concernent. Que conclure de là, relativement à la géométrie pure, sinon qu'il faut revenir à la méthode sévère, mais restreinte des anciens, ou proclamer comme un axiome indiscutable la double permanence des relations algébriques auxquelles donne lieu toute figure

primitive et des propriétés descriptives de cette figure, lorsqu'elle se transforme en systèmes corrélatifs ; c'est à ce dernier parti que s'arrête Poncelet. Il appelle, en conséquence, *Principe de continuité* l'axiome en question et le formule ainsi :

« Si l'on conçoit qu'une figure donnee vienne à changer de situation « par un mouvement progressif et continu des parties dont elle se com- « pose, sans cependant violer la liaison et la dépendance primitivement « établies entre elles, les relations ou propriétés métriques qui concer- « naient la figure dans la situation première demeurent applicables, dans « leur forme générale à toutes les figures dérivées, sans autre change- « ment que celui des dénominations simples *plus* et *moins* qui peuvent « s'intervertir entre elles dans ces relations. Quant aux relations pure- « ment graphiques ou descriptives, qui concernent la figure primitive, « elles demeurent applicables à toutes les figures dérivées sans autre « modification que celles survenues dans la situation respective des « lignes. »

Malgré le rôle important qu'il joue dans le *Traité des Propriétés Projectives des figures*, le principe de continuité ne sert pas nécessairement de base à toutes les parties de l'ouvrage ; c'est ainsi que la doctrine des *cordes idéales* qui va nous occuper n'en relève aucunement, comme l'a très-bien fait observer Cauchy, dans son rapport sur les travaux de Poncelet.

L'examen des ordonnées imaginaires de la circonférence devait amener la comparaison de cette courbe avec l'hyperbole équilatère. Ce fut ainsi que Vincent Ricatti, puis Lambert, purent joindre la théorie des fonctions hyperboliques à celle des fonctions circulaires et compléter l'une par l'autre. Poncelet semble avoir voulu généraliser leur méthode en l'appliquant à toutes les courbes du second degré.

« Supposons, dit Cauchy dans le rapport mentionné plus haut, que « l'on cherche, par l'analyse, les points d'intersection d'une droite quel- « conque avec une courbe du second degré, et la distance de ces deux « points, ou, en d'autres termes, la corde qui les unit; lorsque la droite « ne rencontrera plus la courbe, la distance donnée par l'analyse de- « viendra imaginaire et sera de la forme $2C\sqrt{-1}$; tandis que le point

« milieu de la corde conservera des coordonnées réelles. Il devient « alors utile de susbtituer à la corde imaginaire, qui n'existe pas, une « corde fictive 2C, comptée sur la droite proposée, et dont le milieu « coïncide avec le point dont nous venons de parler.

« C'est à cette corde fictive qu'on pourrait appliquer la dénomination « de corde idéale par laquelle M. Poncelet désigne tantôt la droite in- « définie que l'on considère, et tantôt la corde imaginaire interceptée « par la courbe, puisqu'il appelle centre de la corde idéale le point réel « que l'analyse indique comme étant le milieu de la corde imaginaire. « Le sens dans lequel l'auteur emploie le mot idéale se trouverait « ainsi modifié de telle manière que les longueurs idéales resteraient « des longueurs réelles et constructibles en géométrie. Ainsi, par exem- « ple, dans une hyperbole dont le grand axe rencontre la courbe, la « longueur idéale du diamètre perpendiculaire au grand axe, serait le « petit axe lui-même. Si, en adoptant cette manière de s'exprimer, on « construit, pour une section conique quelconque, toutes les cordes « idéales parallèles à une direction donnée, les extrémités de toutes ces « cordes se trouveront sur une nouvelle section conique, que l'auteur ap- « pelle *supplémentaire* de la première, relativement à la direction dont « il s'agit.

« Cela posé, il est facile de voir que deux sections coniques supplé- « mentaires l'une de l'autre, relativement à une direction donnée, sont « nécessairement ou deux paraboles, ou une hyperbole et une ellipse. « Dans le premier cas, les deux paraboles ont le même paramètre, avec « une tangente commune parallèle à la direction donnée et un diamètre « commun passant par le point de contact. Dans le second cas, les deux « courbes peuvent aisément se déduire l'une de l'autre, d'après la con- « dition à laquelle elles se trouvent assujetties, d'avoir en commun deux « diamètres conjugués, dont l'un est parallèle à la droite donnée, tandis « que l'autre rencontre à la fois les deux courbes qui se touchent ainsi « par ses extrémités. Dans le même cas, toutes les fois que l'ellipse se « réduit à un cercle, l'hyperbole devient équilatère et a pour axe trans- « verse le diamètre du cercle.

« Dans ce qui précède, nous avons déduit de l'analyse la notion des

« cordes idéales ; mais on peut arriver au même but par des considéra-
« tions géométriques.

« Par exemple, lorsqu'une ellipse ou une hyperbole se trouve coupée « en deux points réels par une sécante quelconque, le milieu de la corde « interceptée coïncide avec le point où la sécante est rencontrée par le « diamètre conjugué à sa direction, et la corde elle-même est équiva- « lente au double produit du rapport entre le diamètre parallèle et le « diamètre conjugué, par une moyenne proportionnelle entre les dis- « tances du point que l'on considère aux extrémités du diamètre con- « jugué. Si l'on détermine, d'après les mêmes conditions, la corde et « son milieu dans le cas où la sécante devient idéale, on obtiendra ce que « nous avons appelé la corde idéale relative à cette sécante. »

Il faut ajouter que la seconde manière de procéder est celle de Poncelet. Ce profond géomètre ne voit d'ailleurs dans la conception des cordes idéales qu'un moyen d'établir d'utiles rapprochements entre les courbes réelles. « Ces définitions, dit-il, servent à agrandir les idées, et tendent à abréger le discours ; elles ne sont ni indifférentes ni inutiles en elles-mêmes, parce qu'elles permettent d'établir un point de contact entre des figures qui paraissent au premier aspect, n'avoir aucun rapport, et de découvrir sans peine les relations et les propriétés qui leur sont communes. » On le voit donc, la doctrine des cordes idéales ne se rattache aucunement au principe de continuité, bien qu'elle ne trouve son application que dans le cas de la corrélation idéale.

M. Chasles dont les travaux ont tant contribué de nos jours aux progrès de la géométrie pure se distingue à son tour de ses prédécesseurs par d'heureuses innovations.

Son premier soin est d'introduire en géométrie, d'une manière *générale* et *systématique, le principe des signes*, pour marquer la direction des segments ou des angles. « Certes, dit-il [1], à propos de la conception de « Carnot, le principe de corrélation est un progrès en géométrie ; mais « il n'est pas suffisant, et le défaut de rigueur absolue n'est pas ici le

[1] *Géométrie supérieure*, Préface.

« plus grave inconvénient de cette manière de procéder, il en est d'au-
« tres qui touchent à l'essence même de la science; car les propositions
« dans lesquelles on ne fait pas entrer le principe des signes sont, en
« général, incomplètes ; en n'y considérant que les valeurs numériques
« des segments on néglige une partie essentielle des propriétés de la
« figure, que ces propositions auraient exprimées au moyen des
« signes. » L'éminent géomètre applique donc le principe des signes à toutes les relations qui lui en paraissent susceptibles, même aux égalités à deux termes, et les raisons qu'il donne à l'appui doivent certainement prévaloir sur les objections de Poncelet.

M. Chasles n'admet pas non plus sans réserve le principe de continuité dans son *Traité de géométrie supérieure.*

« Sans vouloir, dit-il (1), élever aucune objection contre cette manière de
« procéder qui peut, dans certaines questions, fournir au géomètre des
« ressources dont il fait bien de ne point se priver, j'ai cru cependant,
« et par plusieurs raisons, devoir m'abstenir de l'employer dans l'ou-
« vrage actuel.

« D'abord, ce principe de continuité n'étant pas démontré *a priori*, en
« l'invoquant comme une sorte d'axiome ou de *Postulatum*, on s'écarte
« de l'exactitude rigoureuse qui constitue le caractère principal et l'on
« peut dire la supériorité des sciences mathématiques en général, mais
« surtout de la géométrie.

« En outre, ce principe fût-il prouvé en toute rigueur, on n'a point
« une démonstration directe qui seule satisfait complétement l'esprit;
« on laisse, dans chaque question, une lacune et un sujet de recher-
« che.

« Mais, il est une autre considération plus puissante qui m'a déter-
« miné à ne pas profiter, dans ce volume destiné à poser les bases des
« méthodes générales, des facilités qu'aurait pu offrir souvent le prin-
« cipe de continuité. Une étude attentive des différents procédés de dé-
« monstration qui peuvent s'appliquer à une question m'a convaincu

(1) *Géométrie supérieure*, Préface.

« qu'à côté d'une démonstration facile, fondée sur quelques propriétés « accidentelles ou contingentes d'une figure, devaient s'en trouver « toujours d'autres, fondées sur des propriétés absolues et subsistantes, « dans tous les cas que peut présenter la figure, en raison de la diver- « sité de position de ses parties, et j'ai éprouvé que la recherche de ces « démonstrations complétement rigoureuses est d'autant plus utile « qu'elle met nécessairement sur la voie des propositions les plus im- « portantes, de celles qui établissent tous les liens qui doivent exister « entre les différentes parties d'un même sujet.

« Je me suis donc proposé d'introduire dans cet ouvrage, avec la no- « tion explicite des imaginaires, des démonstrations, aussi rigoureuses « et aussi générales que celles de la géométrie analytique.

« Ces démonstrations deviennent aussi faciles que les premières, « quand on a préparé la voie par la recherche de propositions d'une « certaine nature : savoir, de propositions reposant sur des propriétés « *absolues* ou *permanentes* de la figure que l'on considère, et non simple- « ment sur ses propriétés *contingentes*. Ces propositions se distinguent « par ce caractère spécial, que les objets susceptibles de devenir imagi- « naires n'y entrent pas sous forme explicite ; mais s'y trouvent repré- « sentés par des éléments réels, de même que les racines d'une équa- « tion n'entrent pas elles-mêmes dans les calculs de la géométrie analy- « tique et y sont représentés collectivement par les coefficients de l'é- « quation.

« Ces propositions, où n'entrent ainsi que des relations qui, en ana- « lyse, s'expriment au moyen des coefficients d'une équation, sont celles « qu'il importe le plus de connaître, comme étant à la fois plus fécondes « et plus propres à donner à la géométrie le degré de généralité qui fait « la puissance de l'algèbre. »

Il suffit de lire avec attention ce passage pour se convaincre que la méthode de M. Chasles ne diffère pas autant de celle de Poncelet, qu'on pourrait le croire au premier abord. En effet, des deux permanences proclamées par le principe de continuité, M. Chasles admet évidemment la première. Car, lorsqu'il détermine, par exemple, deux points imaginaires par la demi-somme , et le produit de leurs distances

à une origine fixe, ou, pour mieux dire, lorsqu'il définit ces points à l'aide d'une équation du second degré, à coefficients réels, il sait fort bien que cette équation ne subsiste alors qu'en vertu d'un principe d'extension purement gratuit; et, comme il le remarque parfaitement lui-même, « cette manière de considérer les imaginaires est tout à fait conforme à « ce qu'on fait en géométrie analytique. Mais ici les équations sont for- « mées avec les données mêmes de la question, ce qui est le plus haut « point de simplicité que l'on puisse considérer. »

Quant à la permanence des propriétés descriptives de toute figure qui se transforme en systèmes corrélatifs, M. Chasles l'admet également; mais il ne fait porter ses démonstrations que sur celles de ces propriétés qui sont absolues : et c'est par là qu'il se distingue essentiellement de Monge et de Poncelet. Cependant, il faut bien le reconnaître, malgré sa rigueur relative, la méthode de M. Chasles ne satisfait pas encore à tous les besoins de la science. D'abord elle ne s'applique qu'aux lieux des équations à coefficients réels. De plus, faute de construire les éléments imaginaires des figures, elle prive la géométrie supérieure de ce cachet d'évidence qui distingue l'analyse ancienne. Il est vrai que pour obvier en partie à ce dernier inconvénient, on peut recourir avec Poncelet à de simples rapprochements entre des courbes réelles; mais ce n'est là, si j'ose le dire, qu'un aveu d'impuissance plutôt qu'une solution définitive. J'avoue même que les vues analogues développées par M. Chasles dans une note de l'*Aperçu historique* ne me semblent guère plus concluentes. Cette note où l'éminent géomètre essaie lui aussi d'éclaircir ou même de remplacer la notion des imaginaires par la comparaison de courbes réelles mérite d'être reproduite ici, ne fut-ce que comme un utile complément à la doctrine des cordes idéales.

« La considération des relations et des propriétés contingentes d'une « figure ou système géométrique, dit M. Chasles, est propre à donner « l'explication du mot *imaginaire*, employé maintenant assez fréquem- « ment, et avec avantage, dans les spéculations de la géométrie pure.

« En effet, on ne peut regarder l'expression d'imaginaire que comme « indiquant seulement un état d'une figure dans lequel certaines parties « qui seraient réelles dans un autre état de la figure, ont cessé

« d'exister. Car on ne peut se faire l'idée d'un objet imaginaire qu'en se « représentant en même temps un objet de l'espèce dans un état d'exis- « tence réelle, de sorte que l'idée d'imaginaire serait vide de sens, si « elle n'était toujours accompagnée de l'idée actuelle d'une existence « réelle du même objet auquel on l'applique. Ce sont donc les relations « et propriétés que nous avons appelées *contingentes* qui donnent la clef « des imaginaires en géométrie.

« Mais on voit par là qu'on pourrait très-facilement éviter, si l'on « voulait, la considération des imaginaires dans le raisonnement ; il « suffirait de supposer, à côté de la figure dont on a à démontrer quel- « que propriété une seconde figure de même nature, mais, dans un état « général de construction où les parties contingentes, qui sont imagi- « naires dans la figure proposée, seraient réelles. C'est là effectivement, « ce que l'on fait tacitement, en raisonnant sur les imaginaires comme « sur des objets réels ; de sorte que l'on peut dire que l'emploi du mot « imaginaire est une manière abrégée de s'exprimer, et qui signifie que « les raisonnements que l'on fait s'appliquent à un autre état général « de la figure, dans lequel les parties sur lesquelles on raisonne existe- « raient réellement, au lieu d'y être imaginaires comme dans la figure « proposée. Et comme, d'après le principe des relations contingentes, « ou si l'on veut, d'après le principe de continuité, les vérités démon- « trées pour l'un des deux états généraux de la figure s'appliquent à « l'autre état, on voit que l'emploi et la considération des imaginaires « se trouvent complétement justifiés.

« Nous devons faire ici une observation importante, la voici :

« Etant donnée une figure, dans laquelle se trouvent des parties ima- « ginaires, on peut toujours, d'après ce que nous venons de dire, en « concevoir une autre, de construction aussi générale que la première, « et dans laquelle ces parties qui étaient d'abord imaginaires, sont « réelles ; mais, et c'est en cela que consiste notre observation, il n'est « jamais permis de raisonner, ni d'opérer sur la première figure elle- « même, en y regardant comme réelles, certaines parties qui y étaient « imaginaires. Par exemple, si une expression donnée par le calcul, « pour déterminer un point sur une droite, est imaginaire, ce point est

« lui-même imaginaire, et on commettrait une faute très-grave en cons-
« truisant ce point comme si son expression était réelle. Le point ainsi
« construit n'appartiendrait point à la figure, ni à la question proposée;
« et tous les résultats déduits de la considération de ce point seraient
« empreints d'erreur. »

« Ce serait une chose intéressante, poursuit M. Chasles, de recher-
« cher les rapports et la corrélation qui peuvent avoir lieu entre les
« propriétés de deux figures, dans l'une desquelles on a construit,
« comme étant supposées réelles, des parties qui dans l'autre sont ima-
« ginaires. Tels sont l'hyperbole équilatère et le cercle décrit sur son
« axe principal comme diamètre. Toute corde du cercle, perpendiculaire
« à cet axe, a son carré réel : si son pied sur l'axe est dans l'intérieur
« du cercle, cette corde a aussi sa longueur réelle ; mais si son pied est
« au dehors du cercle, cette longueur est imaginaire, bien que son carré
« soit réel ; si on la construit en la supposant réelle, son extrémité dé-
« termine un point qui appartiendra à une hyperbole équilatère, et la
« corde en question jouira de propriétés différentes suivant qu'elle sera
« prise dans le cercle, ou dans l'hyperbole. Par exemple, dans le cercle,
« les droites menées de l'extrémité de la corde aux deux extrémités du
« diamètre, font entre elles un angle droit ; et, dans l'hyperbole, ces
« deux droites font entre elles un angle de grandeur variable.

« M. Carnot a déjà fait, dans son *Traité de la Corrélation des figures de*
« *géométrie*, et dans sa *Géométrie de Position*, des réflexions sur la corré-
« lation des figures dont nous parlons, et sur celle des formules algé-
« briques qui leur correspondent en analyse, mais l'objet principal des
« travaux de cet illustre savant dans cette matière, étant la corrélation
« des figures qui ne diffèrent que par de simples changements de signes
« des variables elles-mêmes, et non de leurs fonctions, dans les expres-
« sions algébriques, la corrélation des figures qui diffèrent comme nous
« venons de le dire, en ce que l'on construit dans l'une, comme étant
« réelle, une expression imaginaire dans l'autre, cette corrélation, dis-
« je, est un objet de recherches tout nouveau, et qui nous paraît sus-
« ceptible de conduire à quelques lois générales de l'étendue, qui pour-
« raient accroître la puissance des doctrines géométriques. »

Cette dernière prévision est des plus remarquables. Cependant, pour la voir se réaliser, il faut suivre, non pas la route que vient d'indiquer M. Chasles, mais l'exemple qu'il a donné dans une autre occasion. En effet, l'un des grands services rendus par cet illustre mathématicien à la géométrie pure est d'y avoir introduit le principe des signes, ou, pour mieux dire, la distinction des deux sens que peuvent affecter les droites ou les angles. Or, qu'on tienne également compte des deux modes contraires que ces grandeurs comportent, et les lois générales dont il était question tout à l'heure se révèlent aussitôt. C'est donc faute d'avoir suivi jusqu'au bout l'une de ses plus heureuses inspirations que M. Chasles ne réalise pas le progrès qu'il a pressenti, et n'essaie, comme Poncelet, d'interpréter les expressions imaginaires qu'au moyen de courbes ou de surfaces réelles se succédant suivant les phases de la question que l'on traite.

Les travaux dont il me reste à parler sont ceux de M. Marie. Malgré leur caractère analytique, ces travaux ne constituent qu'une extension de la doctrine des cordes idéales, extension considérable il est vrai par le nombre des sujets qu'elle embrasse, mais qui ne reposant sur aucun principe nouveau ne semble guère appelée à fermer, comme le veut son auteur, le champ des hypothèses en matière d'interprétation des imaginaires.

« Une équation $f(x, y) = o$, ne contenant qu'une variable indépen-
« dante, dit M. Marie [1], ne fournit qu'un nombre limité de suites de so-
« lutions réelles, embrassant des espaces plus ou moins étendus entre
« $+\infty$ et $-\infty$, soit par rapport à $x$, soit par rapport à $y$ ; mais si, dans
« la même équation on remplace $x$ par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $y$ par $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$,
« les quatre variables $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$, ne se trouvant liées entre elles que par
« deux équations, deux d'entre elles pourront être regardées comme
« indépendantes ; l'indétermination sera double.

« De même, dans une équation $f(x, y, z) = o$, l'indétermination n'est

[1] *Théorie des fonctions des variables imaginaires.* Paris, Gauthier-Villars.

« que double, tant qu'on ne considère que les solutions réelles, et de-
« vient quadruple lorsqu'il s'agit de solutions imaginaires.

« Il résulte de là que, si à une solution $(x, y)$ d'une équation $f(x,y)=o$, « ou à une solution $(x, y, z,)$ d'une équation $f(x, y, z) = o$, on faisait « correspondre un point du plan ou de l'espace, point dont les coordon- « nées réelles se formeraient, suivant des lois connues, des parties « réelles et imaginaires de $x$ et de $y$, ou de $x$, de $y$ et de $z$, et que, d'un « autre côté, on associât les unes aux autres les solutions de l'équation « proposée qui rempliraient une ou deux conditions choisies à l'avance, « on pourrait regarder une équation à deux variables comme représen- « tant une courbe réelle, plus une infinité de courbes imaginaires, et une « équation à trois variables comme représentant une surface réelle plus « une infinité d'infinités de surfaces imaginaires. »

En conséquence, M. Marie adopte, à l'égard des équations à deux variables les règles suivantes :

1° La solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$
$$y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

d'une équation $f(x, y) = o$ représente le point

$$x_1 = \alpha + \beta$$
$$y_1 = \alpha' + \beta'$$

2° Les solutions qu'il faut associer pour former un lieu des points qui y correspondent sont celles où $\frac{\beta'}{\beta}$ aurait une valeur constante C. Le lieu des points $(x_1, y_1)$ s'appelle *Conjuguée* du lieu plan correspondant; C en est la *Caractéristique*.

Chacune de ces règles a son utilité; la première entraîne la permanence des lieux représentés sur un plan par une même équation, quelque transformation de coordonnées qu'on lui fasse subir : la seconde permet, à l'aide d'un changement préalable d'axes, de rendre réelles les abcisses de tous les points d'un des lieux imaginaires considérés, et de comparer

par suite l'expression analytique de leurs ordonnées à celles des ordonnées réelles du même système, la variable indépendante étant cette fois réelle de part et d'autre.

Ces deux règles s'étendent facilement d'ailleurs aux équations à trois variables, et l'application qu'en fait constamment M. Marie le conduit à des résultats d'une certaine importance soit en analyse, soit en géométrie pure. Mais ce qui nous intéresse particulièrement ici c'est le principe même de sa méthode. Or, ce principe ne diffère pas essentiellement de la doctrine des cordes idéales. Un seul exemple suffira pour le faire voir. Concevons en effet qu'après avoir construit avec Poncelet l'hyperbole supplémentaire d'une ellipse, on rapporte les deux courbes au système de diamètres conjugués qui leur est commun, l'hyperbole a ses abscisses réelles, ses ordonnées imaginaires, mais celles-ci se représentent comme celles-là par des droites réelles. Qu'on vienne maintenant à changer la direction des axes, et soit $y = mx$, l'équation de l'ancien axe des $y$, les points de l'hyperbole supplémentaire ne cessent pas d'être réels, non plus que les parallèles aux nouveaux axes issues de ces mêmes points. Mais cette hyperbole n'en représente pas moins le lieu des intersections imaginaires de l'ellipse avec le système de droites parallèles à la direction $y = mx$ : et comme les valeurs correspondantes des variables sont alors de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, on est conduit par la construction même de Poncelet à interpréter les valeurs de cette forme par les droites de longueur $\alpha + \beta$. Or, c'est là ce que fait déjà M. Marie, lorsqu'il applique sa première règle à la nouvelle équation de l'ellipse. Par sa seconde règle, il n'admet en outre que les points imaginaires du lieu situés sur un système donné de droites parallèles, en sorte que toute conjuguée C a ses cordes parallèles à la direction $y = Cx$. On prévoit par suite qu'en prenant $C = m$, M. Marie trouvera pour conjuguée correspondante l'hyperbole supplémentaire dont il était question tout à l'heure, et c'est effectivement ce qui arrive. De plus un simple retour aux premiers axes le ramène à la construction de Poncelet. Au fond, M. Marie ne procède donc pas autrement que ce dernier. Sa méthode est avant tout algébrique ; celle de Poncelet s'appuie d'avantage sur la géométrie; mais toutes deux se réduisent à déterminer les points de rencontre d'un système de

parallèles avec le lieu que l'on étudie, puis à représenter les solutions imaginaires par des droites réelles. Seulement M. Marie étend ce mode d'interprétation aux solutions mixtes elles-mêmes; et c'est ce qui lui permet d'appliquer la notion des cordes idéales au lieu d'une équation de degré quelconque.

Il est encore, dans ce même ordre d'idées, un point où M. Marie semble vouloir aller plus loin que Poncelet: c'est lorsqu'ayant associé au lieu réel d'une équation toutes les conjuguées correspondantes, il regarde celles-ci comme étant aussi bien représentées par l'équation que ce lieu lui-même; en sorte que, pour me servir de ses propres expressions:

« L'être géométrique ne serait plus, comme dans l'antiquité, une « branche ou nappe de courbe ou de surface, jouissant dans toute son « étendue, et sans aucune modification quelconque, de propriétés abso- « lument identiques; ni, comme dans la géométrie moderne, un assem- « blage de plusieurs branches ou nappes dont les parties jouissent de « propriétés pareilles, à la différence près de quelques changements de « sens ou de direction; mais une courbe ou surface, lieu principal dans « la question qui aurait fourni l'équation, accompagnée d'une infinité « d'autres lieux secondaires, jouissant de propriétés analogues, et qui se « substitueraient au lieu réel toutes les fois qu'il ne pourrait plus four- « nir les solutions déterminées qu'on s'était proposé d'obtenir. »

Il est à craindre qu'en cela M. Marie ne se fasse illusion sur la portée de sa méthode. Que dire, en effet, de cet ensemble de lignes ou de surfaces répondant indistinctement les unes aux solutions réelles, les autres aux solutions imaginaires d'une même équation, sinon qu'on ne saurait pas plus y voir un être géométrique qu'une bonne traduction des symboles de l'algèbre. On conçoit à la rigueur que le principe des signes, malgré ce qu'il offre de conventionnel, s'applique au lieu d'une équation à deux ou trois variables sans en détruire l'unité, les grandeurs positives et négatives se distinguant nettement les unes des autres par le sens qu'elles affectent, et permettant de passer sans ambiguïté de l'équation à la figure correspondante ou réciproquement. Mais dès qu'on n'établit aucune différence entre l'interprétation des solutions imagi-

naires et celle des solutions réelles, il est clair qu'on n'a plus les mêmes motifs de sécurité. A supposer d'abord que chaque lieu principal forme avec ses conjuguées un être géométrique, la coordination de ces figures toutes réelles n'est pour ainsi dire que nominale; elle ne permet pas de remonter directement de l'une quelconque des conjuguées à l'équation qui par hypothèse les comprend toutes. Il faut pour cela se rappeler que cette conjuguée a ses coordonnées de tel ou tel mode, sans que la géométrie fournisse à cet égard le moindre indice. De là des complications qui prouvent que l'union de cette dernière science avec l'algèbre n'est pas encore parfaitement cimentée et que la figure totale n'offre pas l'unité de l'équation correspondante. Mais il est un reproche plus grave à faire au mode d'interprétation adopté par M. Marie; c'est que lieu réel et conjuguées, loin de former un tout bien coordonné, s'excluent au contraire mutuellement. Je n'ai pas besoin d'en alléguer d'autre preuve que la conclusion formulée plus haut par M. Chasles, savoir, que tout point imaginaire, construit comme s'il était réel, ne fait partie ni de la figure que l'on a en vue, ni de la question que l'on traite. Inutile d'ajouter que s'il n'y a pas de connexion possible entre chaque lieu réel et ses conjuguées, toute considération fondée sur l'existence d'un pareil lien se trouve infirmée par là même. Ces réserves faites, les recherches de M. Marie n'en présentent pas moins, comme je l'ai déjà dit, beaucoup d'intérêt. Sa méthode facilite à la fois la comparaison des lieux réels entre eux et l'étude des propriétés des fonctions. Mais, je le répète, les résultats qu'elle fournit, si remarquables qu'ils soient, ne constituent pas une interprétation parfaite des expressions imaginaires, et ne sauraient par conséquent être le dernier mot de la science sur ce point.

En résumé, les éminents géomètres dont je viens de rappeler brièvement les travaux, s'appuient tous d'une manière plus ou moins explicite sur ce qu'on est convenu d'appeler la généralité de l'algèbre, c'est-à-dire sur un principe d'extension purement gratuit. Aussi, pas un n'entrevoit-il la possibilité de construire avec leurs caractères propres les éléments imaginaires des figures, et par suite d'émanciper la géométrie tout en lui ménageant avec l'algèbre une alliance intime fondée sur le

pied de la plus parfaite égalité. Comme il ne semble d'ailleurs guère possible d'aller plus loin qu'ils ne l'ont fait dans une pareille voie, et que malgré leurs efforts le dernier obstacle à vaincre reste debout, il faut ou reconnaître que la science de l'étendue ne comporte dans ses conceptions les plus élevées qu'une évidence tout à fait relative, ou se frayer une autre route.

Ce serait au surplus une erreur de croire que la doctrine aujourd'hui si fort appréciée des quantités complexes puisse être ici d'un grand secours. Cette doctrine ne doit, en effet, la faveur dont elle jouit qu'à l'élégante simplicité des moyens qu'elle procure soit pour l'étude des propriétés des fonctions, soit pour la démonstration d'une foule de vérités géométriques. A la rigueur, comme elle distingue à des signes certains, les droites réelles des droites imaginaires, elle suffirait encore pour légitimer les règles du calcul algébrique. Mais son défaut capital, défaut que rien ne saurait pallier, c'est qu'elle ne peut ni doter la géométrie supérieure des figures que celle-ci réclame, ni servir à compléter le système de coordonnées de Descartes. Est-ce à dire cependant qu'elle soit incapable de conduire à quelque doctrine moins imparfaite? Nullement, et voici pourquoi. La conception des quantités complexes est avec celle des droites de sens contraires le premier essai d'introduction dans l'analyse ancienne d'une nouvelle manière d'être de la grandeur. On ne se contente plus cette fois de considérer dans une droite sa longueur seulement, on tient compte aussi de sa direction qui comprend comme cas particulier le sens positif et le sens négatif. Or, c'est là sans contredit une innovation féconde en résultats importants. Les travaux d'Argant, de Mourey, de Cauchy, de Gauss, de M. Bellavitis ne laissent aucun doute à cet égard. Les faits prouvent donc ici mieux que tous les raisonnements que l'usage exclusif des grandeurs absolues serait pour la géométrie pure une entrave plutôt qu'une garantie de progrès. A la vérité, les quantités complexes, malgré le jour dont elles éclairent les obscurités de l'algèbre, ne permettent pas, comme on l'a déjà dit, de rattacher la géométrie moderne à l'analyse ancienne. Mais quelle conclusion raisonnable tirer de là, sinon que la *direction* n'est probablement pas une manière d'être assez générale de la grandeur, et que tôt

ou tard elle fera place à quelque conception du même genre, pouvant se concilier mieux qu'elle avec l'idée de corrélation introduite dans la science par Carnot. Le moment est donc venu de mettre à l'épreuve l'innovation que je propose.

Je n'ai pas besoin de rappeler que, dans mon système, la direction devient inutile, puisque je n'assigne aux grandeurs géométriques que deux sens ou deux modes contraires. Si je prouve d'ailleurs que ces manières d'être bien définies permettent : 1° d'affecter à leur expression les nombres réels et imaginaires et de démontrer toutes les règles du calcul algébrique ; 2° de répartir les figures de géométrie en groupes naturels de plus en plus composés, où ces figures diffèrent entre elles, d'abord par la valeur absolue, puis par le sens, puis par le mode de leurs parties ; 3° d'identifier d'une manière parfaite les relations numériques fournies par ces divers groupes de figures avec les équations algébriques de degré quelconque, j'aurai soumis, je pense, la méthode que je propose à l'épreuve la plus générale et la plus décisive qu'on puisse exiger d'une innovation de ce genre.

On a déjà vu comment en assignant une signification géométrique précise aux nombres de signes ou de modes quelconques, j'arrive à démontrer les règles du calcul algébrique. Il me reste donc à faire voir que le principe de corrélation tel que je l'ai défini dès le commencement de ce chapitre assure à la science de l'étendue son indépendance et son libre développement tout en la reliant d'une part à l'analyse ancienne et d'autre part au système de coordonnées rectilignes qui prend par là même la plus grande extension dont il soit susceptible. Inutile d'ajouter que, dans ce qui va suivre, je m'appuierai de préférence sur les exemples les plus simples, comme étant les plus propres à faire juger d'une méthode nouvelle. Cela dit, j'entre immédiatement en matière, m'occupant d'abord des principes de la géométrie supérieure, c'est-à-dire des propriétés des figures et de leur écriture algébrique, puis du système de coordonnées de Descartes et des questions qui s'y rattachent. Si l'on objecte que, dans les applications qui vont suivre, je n'ai pas assez nettement séparé la Géométrie supérieure de la Géométrie analytique, je répondrai que la première me semble devoir comprendre

l'écriture des propriétés métriques de toute figure bien définie depuis les simples proportions jusqu'à la mise en équation de cette figure dans un système de coordonnées quelconque; tandis que la seconde a spécialement pour, objet étant donnée une équation à deux ou trois variables, d'en construire et d'en étudier le lieu géométrique en s'appuyant sur les propriétés des fonctions. C'est donc uniquement pour ne pas m'écarter sur ce point des habitudes reçues que je commence les applications algébriques par l'exposition du système de coordonnées de Descartes.

---

# QUATRIÈME PARTIE

## APPLICATIONS.

### CHAPITRE I[er]

### APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

SOMMAIRE : Imperfection des éléments actuels de mathématiques. — Réflexions de Poncelet et de M. Chasles à ce propos. — Applications du principe des signes. — Propriétés métriques des triangles. — Propriétés absolues de l'hyperbole équilatère. — Définition générale de la circonférence. — Variétés de cette courbe. — Circonférences de rayon ou de centre imaginaire. — Distance de deux points quelconques. — Définition générale de l'hyperbole équilatère. — Variétés de cette courbe. — Applications de l'analyse ancienne à quelques théorèmes de géométrie supérieure. — Propriétés métriques des triangles imaginaires. — Foyers des coniques. — Résolution graphique, dans tous les cas possibles, des équations du second et du troisième degré.

Poncelet ne se dissimulait pas l'imperfection des éléments actuels de mathématiques (1). « Toutes les lacunes, tous les vides ne sont pas rem« plis, disait-il, et ces lacunes, ces vides se font surtout sentir dans ce « qui semble tenir de plus près aux connaissances préliminaires de la « géométrie. » Mais une prédilection trop prononcée pour l'emploi des grandeurs absolues ne lui permit pas de découvrir la cause du mal.

M. Chasles est mieux inspiré lorsqu'il insiste sur la nécessité d'appliquer le principe des signes aux figures élémentaires ; cependant n'atta-

---

(1) *Propriétés projectives* des figures, Préface.

che-t-il pas trop d'importance à certaines restrictions lorsqu'il ajoute : (1)
« Si l'on ne démontre ordinairement une formule ou relation que pour « une certaine figure, et non dans l'état d'abstraction et de généralité « qui permettrait au moyen des signes + et — affectés aux segments « et aux angles, pour marquer leur direction, de l'adapter indifférem- « ment à tous les cas possibles de la figure, il est facile d'en reconnaître « la raison, c'est que les propositions qui forment le plus ordinairement « les éléments de démonstration dans la géométrie ancienne, ne com- « portent pas l'emploi du principe des signes. Telles sont la proposition « du carré de l'hypothénuse celle de la proportionnalité des côtés homo- « logues dans les triangles semblables ; celle encore de la proportion- « nalité dans tout triangle des côtés aux sinus des angles opposés. La « règle des signes ne s'applique pas à ces propositions, parce que les « segments que l'on y considère sont formés sur des lignes différentes, « et les angles autour de sommets différents. »

Peut-être faudrait-il ici distinguer entre l'étude d'une figure isolée et la comparaison des propriétés métriques ou descriptives de cette figure avec celles des systèmes corrélatifs. Dans le premier cas, la simplicité des démonstrations exige l'emploi des grandeurs absolues. Dans le second cas, au contraire, on est forcé d'assigner à ces mêmes grandeurs certaines manières d'être d'autant plus générales que les figures à classer sont plus variées. Quant aux propriétés métriques des triangles, ce qu'en dit M. Chasles fait supposer qu'on ne puisse y parvenir qu'au moyen de la similitude. Cependant il est facile d'établir ces proprétés en ne s'appuyant que sur des propositions comportant l'emploi des signes. C'est ce que je tiens essentiellement à prouver parce que la voie à suivre en pareil cas me semble mener directement à la *Théorie des triangles imaginaires*.

Je rappelle d'abord en les généralisant quelques notions simples sur lesquelles j'aurai besoin de m'appuyer.

O B C A

*Fig. 32*

Soient O, A, B, trois points en ligne droite et C le milieu de AB.

(1) *Géométrie supérieure*, Préface.

Si le point O n'est pas entre A et B (*fig.* 32) les droites absolues OA, OB, ont pour demi-somme OC, pour demi-différence CA, et l'on a

$$OA = OC + CA, \qquad OB = OC - CA$$

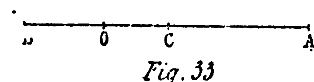


*Fig.* 33

Dans le cas contraire (*fig.* 33) les droites OA, BO, ont pour demi-somme CA, pour demi-différence OC et l'on a

$$OA = OC + CA, \qquad BO = CA - OC.$$

Mais qu'on vienne à tenir compte à la fois de la longueur et du sens des droites en question, et le second cas rentre aussitôt dans le premier. Car les droites OA, OB, ont toujours alors pour demi-somme OC, pour demi-différence CA, en sorte qu'on a constamment

$$OA = OC + CA, \qquad OB = OC - CA.$$

Voilà donc un premier avantage de l'emploi des droites de sens quelconque. Si l'on observe de plus qu'en multipliant membre à membre les égalités précédentes, il vient

$$OA \times OB = \overline{OC}^2 - \overline{CA}^2$$

on en conclut ce théorème important:

Le produit de deux droites de même sens ou de sens contraires est toujours égal au carré de leur demi-somme diminuée du carré de leur demi-différence.

Ce même theorème s'étend d'ailleurs aux droites imaginaires ou mixtes.

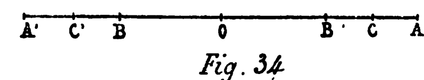


*Fig.* 34

Ainsi, les droites imaginaires O (A, A') ou OA*i* et O (B, B') ou OB*i* ayant pour demi-somme O (C, C') ou OC*i* et pour demi-différence (C, C') (A, A') ou CA*i*, on a bien (*fig.* 34)

$$OAi = OCi + CAi$$
$$OBi = OCi - CAi$$

et par suite

$$OAi \times OBi = (OCi)^2 - (CAi)^2$$



*Fig. 35*

De même, les droites mixtes conjuguées $OA + ABi$ et $OA + AB'i$ (*fig.* 35) donnent

$$(OA + ABi)(OA + AB'i) = OA^2 - (ABi)^2$$

Revenons pour un moment aux droites absolues afin d'étudier l'une des propriétés les plus importantes de la circonférence.

On sait que deux sécantes antiparallèles déterminent sur les côtés d'un angle à partir du sommet quatre segments réciproques.

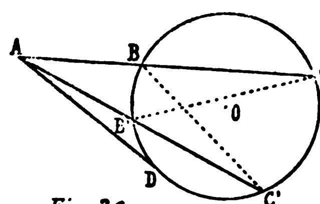


*Fig. 36*

Or, soient menées d'un point quelconque A deux sécantes coupant aux points B, C, B' et C' la circonférence O (*fig.* 36, 37). Si l'on tire les cordes BC' et CB', les angles C et C' sont égaux comme inscrits dans le même segment, et par suite les cordes BC' et CB' sont antiparallèles. Dans un cas comme dans l'autre, on a donc

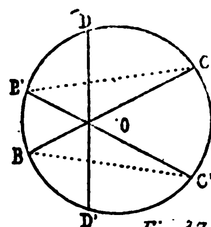


*Fig. 37*

$$(1) \qquad AB \times AC = AB' \times AC'$$

Si, de plus l'une des sécantes tourne autour du point A, de telle sorte que la corde interceptée, B'C' par exemple, se réduise à un point D (*fig.* 36) ou prenne (*fig.* 37) une position DD' telle que le point A soit son milieu, la relation précédente devient

$$(2) \qquad AB \times AC = \overline{AD}^2$$

Il est bon d'observer cependant que, pour la droite DD′, on a réellement

$$AB \times AC = AD \times AD'$$

et qu'on remplace AD′ par son égale AD.

Ainsi, à ne considérer que des droites absolues, les figures 36 et 37 donnent naissance aux mêmes relations. Mais, dans la traduction de ces figures en nombres, tient-on bien compte de toutes les particularités qui les distinguent ? Nullement; et c'est pourquoi lorsqu'on repasse de l'algèbre à la géométrie, les formules trouvées mènent comme au hasard à l'une des deux figures plutôt qu'à l'autre. Considère-t-on au contraire le sens en même temps que la longueur des droites AB, AC, etc., l'ambiguïté cesse immédiatement, parce que la formule (1), tout en gardant sa forme générale, a ses deux membres positifs pour la première figure, négatifs pour la seconde; et que la formule (2) reste bien dans le premier cas

$$AB \times AC = \overline{AD}^2$$

mais devient dans le second

$$AB \times AC = -\overline{AD}^2$$

à cause de AD′ = — AD.

Passons enfin aux propriétés métriques des triangles en débutant comme toujours par ne considérer que des droites absolues.

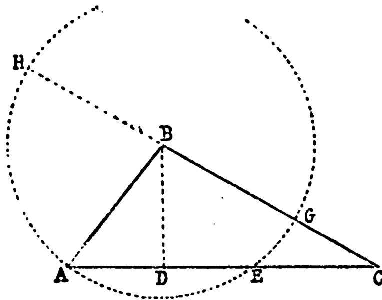


*Fig. 38*

Soit le triangle ABC dont l'angle A est supposé d'abord aigu (*fig.* 38).

Si du point B comme centre avec BA pour rayon on décrit une circonférence qui coupe AC en E, CB en G et son prolongement en H, on a

$$CG \times CH = AC \times CE$$

Mais, puisque $AB = BG = BH$, il est clair que

$$CG \times CH = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$$

De plus, si l'on mène BD perpendiculaire à la corde AE, comme le point D est le milieu de cette corde, il vient

$$\begin{aligned} AC = CE &= AC\,(AC - 2AD) \\ &= \overline{AC}^2 - 2AC \times AD \end{aligned}$$

Donc enfin

$$\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - 2AC \times AD$$

ou

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AD.$$

Dans le cas ou AB serait plus grand que BC, le théorème se démontrerait de même à l'aide des sécantes issues d'un point intérieur à la circonférence.

Si l'angle A était droit ou obtus, la construction précédente donnerait

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

ou

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC \times AD.$$

Mais dès qu'on tient compte du sens de la projection AD en même temps que de sa longueur, laquelle peut du reste être nulle, ces dernières relations ne sont plus que des cas particuliers de la première.

Ainsi, malgré son incontestable utilité dans d'autres circonstances, la similitude peut sans inconvénient faire place à la conception d'Arnaud de Port-Royal, c'est-à-dire aux sécantes antiparallèles, lorsqu'il s'agit de trouver les propriétés métriques des triangles.

Il reste maintenant à étendre ces mêmes propriétés aux triangles dont les sommets ou les côtés sont imaginaires. Mais on ne saurait construire ces sortes de figures avant d'avoir généralisé la définition de la circonférence et celle de la distance de deux points.

Il est une courbe qui présente avec la circonférence de nombreuses analogies; c'est l'hyperbole équilatère. On peut la définir une courbe telle que les perpendiculaires abaissées de ses points sur une droite fixe sont égales aux distances de leurs pieds à un point fixe.

Soient donc A et BB′ le point et la droite fixes qui servent à définir l'hyperbole (*fig.* 39).

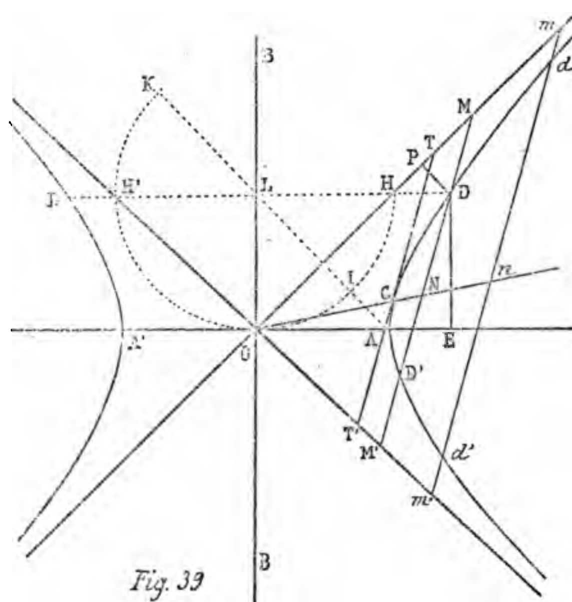


*Fig.* 39

Si l'on mène AO perpendiculaire à BB′, il est clair que A est un point de la courbe, et l'on peut en dire autant de son symétrique A′ par rapport à BB′. De même en tirant la droite quelconque AL, puis en rabattant cette droite suivant LD ou LD′ sur la parallèle menée par le point L à AA′, on a deux nouveaux points de l'hyperbole. Bref, on voit sans plus d'examen que cette courbe à deux branches infinies symétriques par rapport aux droites AA′ et BB′. Le point O d'intersection de ces droites est le centre de l'hyperbole, et la droite OA en est le demi-axe ou rayon.

Si l'on désigne le rayon OA par $r$, la droite OL = DE par $y$ et AL = LD = OE par $x$, le triangle rectangle OAL donne

$$y^2 = x^2 - r^2$$

pour l'équation de la courbe.

Admettons maintenant que le rayon OA devienne nul, ou que le point A se confonde avec le point O, l'hyperbole équilatère se réduit alors au système de deux droites rectangulaires qui sont les bisectrices des angles formés par les axes AA' et BB'. En effet, on a bien pour tout point H de ce système la relation HL = OL. C'est d'après cette considération que le système de deux droites réelles se coupant à angle droit s'appellera dorénavent hyperbole équilatère infiniment petite. L'équation de cette ligne est

$$y^2 = x^2$$

On reconnaît facilement d'ailleurs que la distance DP (*fig.*39) d'un point de l'hyperbole AA' à la droite OH est susceptible de décroître indéfiniment à mesure que le point D s'éloigne de A.

En effet, on a DP < DH. Mais si du point L comme centre, avec LO pour rayon, on décrit une circonférence qui coupe AL aux points I et K, il vient

$$AI \times AK = \overline{AO}^2$$

et comme AK est susceptible de croître au delà de toute limite, il est clair que AI ou DH, et, à plus forte raison, DP, peuvent décroître indéfiniment, mais sans devenir jamais nulles. De là le nom d'asymptotes de l'hyperbole équilatère donné aux droites OH et OH'.

Cela posé, les cordes parallèles MM', *mm'*, du système formé par les asymptotes ont leurs milieux, N, *n*, sur une droite OC, issue du centre, et qui se nomme leur diamètre conjugué. En circonscrivant un cercle au triangle rectangle OMM' on reconnaît de plus que deux directions conjuguées, telles que la corde MM' et son diamètre ON font avec l'axe AA' des angles complémentaires. Mais on démontre sans peine que les

droites menées dans une direction quelconque d'un point de l'hyperbole à ses asymptotes sont réciproques à leurs parallèles menées de tout autre point de la courbe à ces mêmes asymptotes. De là il résulte que:

1° Le diamètre conjugué des cordes parallèles à DD' est OC.

En effet, de l'égalité

$$DM \times DM' = D'M' \times D'M$$

on tire, eu égard à la valeur du produit de deux droites.

$$DM = D'M'$$

2° L'équation de l'hyperbole relativement au diamètre $OC = r'$ et à la direction conjuguée DD' est de même forme que celle de la courbe rapportée à son axe.

Car la droite TCT' tangente en C à l'hyperbole étant parallèle à MM on a

$$DM \times DM' = CT \times CT'$$

ou, comme DM et DM' ont pour demi-somme DN et pour demi-différence NM,

$$\overline{DN}^2 - \overline{NM}^2 = -\overline{CT}^2$$

mais, NM = ON, donc CT = OC ; et si l'on désigne DN par $y$, NM = ON par $x$, il vient

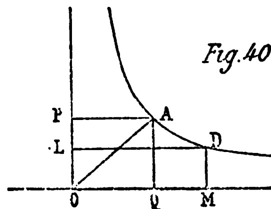
$$y^2 - x^2 = - r'^2$$

c'est-à-dire

$$y^2 = x^2 - r'^2$$

3° L'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes est

$$xy = \frac{r^2}{2}$$




Effectivement, la réciprocité des droites AP, AQ, DL, DM, menées parallèlement aux asymptotes du sommet A et du point quelconque D de la courbe, donne (*fig.* 40).

$$DL \times DM = AP \times AQ$$

relation qui, en posant DM $= y$, DL $=$ OM $= x$, OA $= r$, et par suite AP $\times$ AQ $= \frac{r^2}{2}$ devient

$$xy = \frac{r^2}{2}$$

Les deux dernières équations de l'hyperbole équilatère nous serviront ailleurs : la première va nous permettre de généraliser la définition de la circonférence.

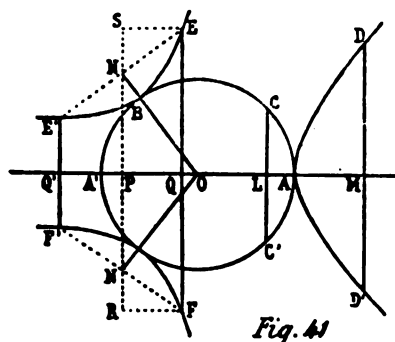


Fig. 41

Soit O une circonférence de diamètre AA'. Si l'on tire la perpendiculaire CLC' à ce diamètre (*fig.* 41) on sait qu'on a

(1) LC $\times$ LC' $=$ LA $\times$ LA'

En d'autres termes, le produit de deux ordonnés symétriques LC et LC' de la courbe est constamment égal au produit des distances de leur pied L aux sommets correspondants A et A'

Soit maintenant DAD' une hyperbole équilatère tangente en A et concentrique à la circonférence. Si l'on regarde les points D et D', symétriques par rapport à AA' comme les composantes des points imaginaires (D, D') et (D', D) on voit que MD*i* et MD'*i* sont deux ordonnées symétriques dont le produit est

$$\text{MD}i \times \text{MD}'i = -(\text{MD}i)^2 = \overline{\text{MD}}^2$$

mais, d'après les propriétés absolues de l'hyperbole, on a

$$\begin{aligned} \overline{\text{MD}}^2 &= \overline{\text{MO}}^2 - \overline{\text{OA}}^2 \\ &= (\text{MO} + \text{OA})\,(\text{MO} + \text{OA}') \\ &= \text{MA} \times \text{MA}' \end{aligned}$$

Donc enfin

(2) MD*i* $\times$ MD'*i* $=$ MA $\times$ MA'

relation de même forme que (1).

Soit, en second lieu, EBE' une hyperbole équilatère toujours concentrique à la circonférence O, mais tangente à cette dernière en un point quelconque B. Si l'on regarde les points E et E', symétriques par rapport à l'axe OB, comme les composantes des points imaginaires (E, E') et (E',E), la droite NE$i$ a pour projections sur AA' et sur PN les droites PQ$i$ et NS$i$ imaginaires comme elle. Mais alors l'ordonnée du point (E,E') est évidemment la droite mixte PN + NS$i$. Comme cette ordonnée est égale et de sens contraire à celle du point (F,F') symétrique de (E,E') par rapport à AA', on en conclut que le produit de ces deux ordonnées est

$$(PN + NSi)\,(PN' + N'Ri) = -\,(PN + NSi)^2$$

$$= -\,\overline{PN}^2 - 2PN \times NSi + \overline{NS}^2$$

Pour obtenir la distance de leur pied commun (Q,Q') aux points A et A' il faut aller d'abord du point (Q,Q') au point P, en suivant la droite négative QP$i$ ou − PQ$i$, puis du point P à chacun des points A et A', ce qui donne les droites PA — PQ$i$ et PA' — PQ$i$. La demi-somme de ces droites étant PO — PQ$i$, et leur demi-différence OA, leur produit est.

$$(PA - PQi)\,(PA' - PQi) = (PO - PQi)^2 - \overline{OA}^2$$

$$= \overline{PO}^2 - 2\,PO \times PQi - \overline{PQ}^2 - \overline{OA}^2$$

Je dis maintenant qu'on a l'égalité

$$-\,\overline{PN}^2 - 2PN \times NSi + \overline{NS}^2 = \overline{PO}^2 - 2PO \times PQi - \overline{PQ}^2 - \overline{OA}^2$$

ou

$$\overline{PQ}^2 + \overline{NS}^2 - 2PN \times NSi = \overline{PN}^2 - 2PO \times PQi + \overline{PO}^2 - \overline{OA}^2$$

En effet, si l'on observe que SE = PQ, $\overline{PQ}^2 + \overline{NS}^2 = \overline{NE}^2$, $\overline{PN}^2 + \overline{PO}^2 = \overline{ON}^2$, tout se réduit a prouver que

$$\overline{NE}^2 - 2PN \times NSi = \overline{ON}^2 - \overline{OA}^2 - 2PO \times PQi$$

Or, d'après les propriétés de l'hyperbole absolue B, on a déjà

$$\overline{NE}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OA}^2$$

De plus, la similitude des triangles OPN et NSE donne

$$\frac{PN}{PO} = \frac{SE}{NS}$$

d'où, à cause de SE = PQ,

$$PN \times NS = PO \times PQ.$$

Donc enfin,

$$(3) \qquad (PN + NSi)(PN' + N'Ri) = (PA - PQi)(PA' - PQi)$$

relation de même forme que (1) et (2).

La relation (3) est évidemment la plus générale de son espèce ; elle comprend comme cas particuliers les deux premières et toutes celles du même genre. De plus, la branche circulaire et ses conjuguées hyperboliques forment un tout bien coordonné puisqu'elles se distinguent nettement les unes des autres par le mode de leurs points. Il est donc naturel de ne voir dans l'ensemble de ces diverses branches qu'un seul et même lieu : c'est ce que je ferai désormais en conservant à ce lieu le nom de sa branche réelle.

Ainsi envisagée, la *circonférence* est une courbe telle que ses ordonnées sont deux à deux moyennes symétriques entre les distances de leur pied à deux points fixes situés sur l'axe conjugué de leur direction. C'est par cette propriété que la circonférence, prise dans son acception la plus générale, se distingue des autres courbes.

En désignant par $y$ la valeur d'une ordonnée du lieu, par $x$ la demi-somme des distances du pied de cette ordonnée aux sommets, et par $r$ la demi-différence de ces mêmes distances ou le rayon, on a pour équation de la courbe

$$-y^2 = x^2 - r^2 \quad \text{ou} \quad y^2 + x^2 = r^2$$

Lorsque le rayon *r* décroît jusqu'à zéro, la circonférence devient infiniment petite; elle se compose alors d'un centre réel et de deux droites imaginaires issues de ce point et formées chacune d'une infinité de branches ayant leurs composantes rectangulaires.

L'équation d'une circonférence infiniment petite est

$$y^2 + x^2 = o$$

Les deux droites imaginaires dont cette ligne se compose sont les asymptotes de toute circonférence réelle concentrique.

Si l'on conçoit que le point A restant fixe (*fig.* 41), le rayon OA devienne infini, la circonférence O se réduit à une droite réelle perpendiculaire en A à AA', et il en est de même non-seulement de la branche hyperbolique DAD', mais encore de toutes les autres branches conjuguées. D'où il suit qu'une droite réelle comporte à la fois des points réels et des points imaginaires, et que chacun de ses points réels est le pied d'un axe qui est conjugué d'une infinité de cordes imaginaires ayant pour milieu ce même point.

Le rayon, au lieu de rester réel, peut devenir imaginaire ou mixte, sans que les propriétés de la circonférence ni son équation s'en trouvent modifiées. Je me bornerai, pour le faire voir, à considérer dans chaque cas la branche circulaire, les conjuguées s'en déduisant généralement d'une manière assez simple.

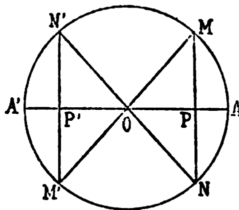


*Fig. 42*

Soit d'abord OA$i$ (*fig.* 42) une droite imaginaire. Si l'on fait tourner cette droite autour du point réel O, son extrémité (A,A') décrit une branche circulaire dont les points ont leurs composantes symétriques par rapport au centre O. Si l'on considère deux points de cette courbe, symétriques par rapport à AA', tels que (M,M') et (N,N'), les ordonnées PM$i$ et PN$i$ de ces points étant égales et de sens contraires, leur produit est

$$\mathrm{PM}i \times \mathrm{PN}i = -(\mathrm{PM}i)^2$$

Les distances de leur pied commun (P, P') aux points (A,A') et (A',A) sont les droites de sens contraires (P,P') (A,A') $=$ PA$i$ et (P, P') (A',A) $=$ PA'$i$. La demi-somme de ces distances étant OP$i$ et leur demi-différence OA$i$, leur produit est

$$\text{PA}i \times \text{PA}'i = (\text{OP}i)^2 - (\text{OA}i)^2.$$

Il reste à prouver que

$$-(\text{PM}i)^2 = (\text{OP}i)^2 - (\text{OA}i)^2$$

ou que

$$\overline{\text{PM}}^2 = \overline{\text{OA}}^2 - \text{OP}^2$$

Or, cette dernière égalité résulte évidemment des propriétés absolues de la circonférence. Donc enfin

$$\text{PM}i \times \text{PN}i = \text{PA}i \times \text{PA}'i.$$

Si l'on désigne en outre PM$i$ par $y$, OP$i$ par $x$ et la constante OA$i$ par $ri$ l'équation de la branche circulaire dont il s'agit est

$$-y^2 = x^2 + r^2$$

ou

$$y^2 + x^2 = -r^2$$

*Fig. 45*

Considérons, en second lieu la droite mixte OA $+$ AB$i$ (*fig.* 43) et supposons que cette droite tourne autour du point O, le point imaginaire (B,B') décrit une circonférence de rayon mixte, formée de deux branches circulaires concentriques mais d'inégale longueur. Les deux points (M,M'), (N,N') de cette courbe répondant à deux positions du rayon symétriques par rapport à BD, ont aussi BD pour axe de symétrie. Les ordonnées de ces points sont donc égales et de sens contraires. Et,

comme en joignant par la droite RSQ les milieux des droites M'M, N'N et tirant les parallèles QL et RT à BD, on a $SQ + LMi$ pour l'ordonnée du point (M,M') et $SR + TNi$ pour celle du point (N, N'), on en conclut d'abord

$$(SQ + LMi)\ (SR + TNi) = -\ (SQ + LMi)^2,$$

Il faut maintenant aller du pied commun (P,P') des deux ordonnées symétriques aux points (B,B') et (D,D'). A cet effet, la droite négative $PSi$ conduit d'abord de (P,P') en S, et l'on passe ensuite du point S à chacun des points (B,B') et (D,D'), ce qui donne les droites $PSi + SA + ABi$ et $PSi + SC + CDi$. La demi-somme de ces droites étant $SO + PSi$ ou $SO + LQi$ et leur demi-différence le rayon $OA + ABi$ ou $OQ + QMi$, on a:

$$(PSi + SA + ABi)\ (PSi + SC + CDi) = (SO + LQi)^2 - (OQ + QMi)^2$$

Il suffit par conséquent de démontrer l'égalité

$$-\ (SQ + LMi)^2 = (SO + LQi)^2 \quad (OQ + QMi)^2$$

ou, en développant et ne considérant que des droites absolues

$$SO \times LQ + SQ \times LM = OQ \times QM$$

Or, la similitude des triangles OQS et QLM donne

$$\frac{SO}{LQ} = \frac{SQ}{LM} = \frac{OQ}{QM}$$

ou

$$\frac{SO \times LQ}{\overline{LQ}^2} = \frac{SQ \times LM}{\overline{LM}^2} = \frac{OQ \times QM}{\overline{QM}^2}$$

et de la relation bien connue des dénominateurs résulte celle qu'il fallait établir entre les numérateurs.

Concluons de là que :

$$-(SQ + LMi)^2 = (PSi + SA + ABi)(PSi + SC + CDi)$$

en sorte qu'on retrouve bien ici la propriété fondamentale de la circonférence. Posant de plus $SQ + LMi = y$, $SO + LQi = x$, $OQ + QMi = a + bi$, on a d'après ce qui précède

$$-y^2 = x^2 - (a + bi)^2$$

ou

$$y^2 + x^2 = (a + bi)^2$$

C'est encore la même forme d'équation que pour les autres cas.

Enfin, il n'est pas jusqu'au centre de la circonférence qui ne puisse devenir imaginaire.

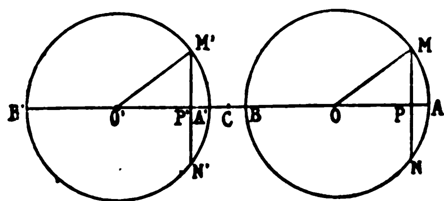


*Fig. 44.*

Soit, effectivement, C (O,O') $= \alpha i$ une droite imaginaire. Si des points O et O' comme centres avec les droites égales OA, O'A', on décrit dans le même sens les deux circonférences O et O', celles-ci, bien que séparées l'une de l'autre n'en sont pas moins les composantes d'une circonférence réelle. Le rayon de cette circonférencequi a pour composantes OA et OA' est de même réel, et l'on doit en dire autant des ordonnées symétriques (P,P') (M,M'), (P,P') (N,N'), ainsi que des distances de leur pied commun (P,P') aux extrémités (A, A') et (B,B') du diamètre. Aussi ne désignerai-je ces diverses droites que par leur première composante.

Cela posé, la circonférence réelle O fournit évidemment les relations

$$PM \times PN = PA \times PA'$$

et

$$-\overline{PM}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{OA}^2$$

Ces mêmes relations subsistent donc aussi pour la circonférence (O,O').

Il reste cependant à indiquer que cette dernière courbe *a* son centre imaginaire.

A cet effet, on prend pour origine non plus le centre (O, O') parce qu'il est imaginaire mais le point réel C'; et c'est principalement dans l'équation du lieu qu'on tient compte de cette particularité. On désigne alors par $x$ la distance du point C au point (P,P'), et comme on a

$$x = \alpha i + OP$$

on en tire

$$OP = x - \alpha i$$

Remplaçant ensuite OP ou PO par cette valeur dans l'une des relations précédentes et représentant PM par $y$, OA par $r$, il vient par l'équation de la branche circulaire

$$-y^2 = (x - \alpha i)^2 - r^2$$

ou

$$y^2 + (x - \alpha i)^2 = r^2$$

c'est donc toujours la forme connue.

Si le rayon $r$ se réduit à un point, la même circonférence devient infiniment petite, et elle a pour équation

$$y^2 + (x - \alpha i)^2 = o$$

Enfin, le centre restant imaginaire, le rayon peut devenir imaginaire ou mixte sans que la courbe obtenue diffère de la circonférence réelle ni par ses propriétés ni par la forme générale de son équation.

En procédant comme je viens de le faire, on reconnaît facilement que, par un point quelconque, on peut toujours faire passer une circonférence ayant pour centre un autre point, et que le rayon de celle-ci ne change pas quel que soit celui des deux points qu'on prenne pour centre. Or, le rayon d'une circonférence réelle est la distance du centre à chaque point de la courbe; mais lorsqu'on associe à la branche réelle une infinité de points imaginaires, le rayon reste le même, l'analogie

conduit donc à l'appeler encore la distance du centre à chacun de ces derniers points. Par suite, la *distance de deux points quelconques* peut se définir, le rayon d'une circonférence ayant pour centre le premier de ces points et passant par le second. Telle est la définition générale que je crois devoir adopter.

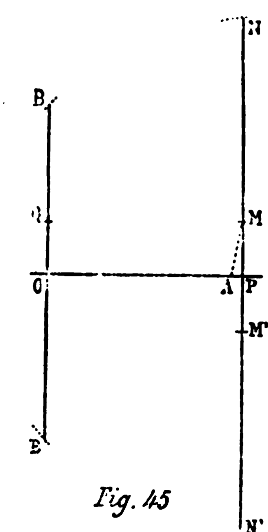


Fig. 45

Soient, par exemple, M et M', N et N' (*fig.* 45), deux couples de points symétriques par rapport à OP. Pour trouver la distance du point O au point imaginaire (M,M'), je cherche le rayon de la circonférence ayant O pour centre et passant par (M,M'). A cet effet, j'élève OQ = PM perpendulaire à OP, puis je décris du point Q comme centre avec l'ouverture de compas QM un arc de cercle qui coupe OP en A, et OA est la distance cherchée. Cette distance est réelle : son expression est $OA = \sqrt{\overline{PO}^2 + (MPi)^2}$. Veut-on déterminer aussi la distance du point O au point imaginaire (N,N'). Comme on a PN > OP, la construction précédente est impossible : c'est qu'alors la distance cherchée n'est plus réelle. Pour la trouver, je décris du point P comme centre avec l'ouverture de compas PN un arc de cercle qui coupe OQ aux points B et B'; comme OB*i* est le rayon de la circonférence imaginaire ayant pour centre O et passant par (N,N')' j'en conclus que cette droite est la distance demandée : son expression algébrique est $OBi = \sqrt{\overline{OP}^2 + (PNi)^2}$. A la vérité, la distance de deux points ne se construit pas toujours aussi simplement ; mais l'essentiel est qu'elle ne cesse jamais d'avoir une significative géométrique précise, puisque son expression algébrique s'obtient dans tous les cas avec une grande facilité.

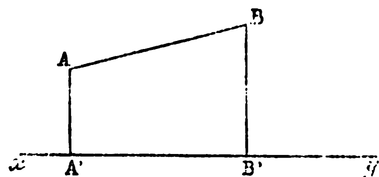


Fig. 46

En même temps que la notion de distance, il importe de généraliser celle de projection. Or, la projection A'B' d'une droite AB sur un axe *xy* (*fig.* 46) est aussi la projection sur cet axe de la distance des points A

et B. En d'autres termes, pour obtenir la projection de la distance de deux points réels sur un axe également réel, il suffit d'y projeter les deux points et de déterminer la distance de leurs projections. La même règle s'applique sans modification aucune à la projection sur un axe réel de la distance de deux points quelconques.

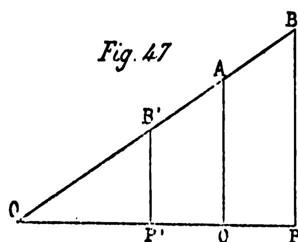


Fig. 47

Ainsi, OA + AB$i$ étant la distance du point O au point (B,B') (*fig.* 47), si l'on mène AQ, BP, B'P' perpendiculaires à l'axe OQ, on a OQ + QP$i$ pour la projection de cette distance sur l'axe. De même les projections sur OP (*fig.* 45) des distances du point O à chacun des points imaginaires (M,M'), (N, N') sont l'une et l'autre égales à la droite réelle OP. On verra plus loin que l'expression algébrique de ces diverses projections est de même forme que celle des projections de droites ordinaires.

L'ellipse, on le devine, n'est pas moins susceptible de généralisation que la circonférence, soit qu'on la regarde comme la projection de cette dernière sur un plan, soit qu'on la définisse d'après une propriété commune à ses cordes parallèles, et l'on peut en dire autant de la parabole qui se rattache intimement, comme on sait, à l'ellipse.

J'ai dans ce qui précède subordonné l'hyperbole équilatère à la circonférence en regardant les points de celle-ci comme réels, et ceux de l'autre comme imaginaires. Mais l'inverse est également possible.

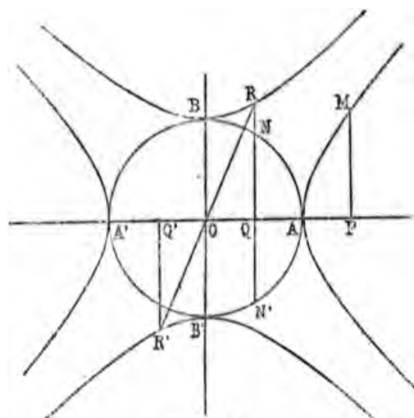


Fig. 48

Soit, en effet, O le centre d'une hyperbole équilatère (*fig.* 48), MP une ordonnée de la courbe PA et PA' les distances de son pied aux deux sommets A et A'. On a d'après la définition du lieu

$$\overline{PM}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{OA}^2$$

et l'on en conclut

$$(1) \qquad \overline{PM}^2 = (PO + OA)(PO + OA') = PA \times PA'$$

Ainsi, la courbe proposée est telle que son ordonnée est moyenne proportionnelle entre les distances de son pied aux extrémités du diamètre AA'.

Soit maintenant une circonférence concentrique à l'hyperbole équilatère et de même diamètre qu'elle. Si l'on mène NN' perpendiculaire en Q à AA', et qu'on regarde les points N et N' comme les composantes des points imaginaires (N, N') et (N', N), les ordonnées de ceux-ci sont QN$i$ et QN'$i$, et l'on a

$$(QNi)^2 = (QN'i)^2 = -\overline{QN}^2.$$

mais des propriétés absolues de la circonférence on conclut

$$-\overline{QN}^2 = QA \times QA'.$$

Donc

$$(2) \qquad (QNi)^2 = QA \times QA'.$$

équation de même forme que (1).

Soit encore BB' une hyperbole équilatère conjuguée de AA'. Si l'on prend sur cette nouvelle courbe deux points R et R', symétriques par rapport au centre O et qu'on les regarde comme les composantes des points imaginaires (R, R') et (R', R). l'ordonnée du premier de ces points est QR$i$ et les distances de son pied (Q, Q') aux points A et A' sont respectivement $-$ OQ$i$ + OA et $-$ OQ$i$ + OA', la demi-somme de ces distances étant $-$ OQ$i$ et leur demi-différence OA, on a d'abord

$$(-OQi + OA)(-OQi + OA') = -\overline{OQ}^2 - \overline{OA}^2.$$

on sait d'un autre côté que

$$(QRi)^2 = -\overline{QR}^2$$

et, comme d'après les propriétés absolues de l'hyperbole BB' on a

$$-\overline{QR}^2 = -\overline{OQ}^2 - \overline{OA}^2$$

on en conclut

$$(3) \quad (QRi)^2 = (-OQi + OA)(-OQi + OA')$$

relation de même forme que (1) et (2).

Enfin, on verrait sans peine que toutes les ellipses tangentes et concentriques aux deux hyperboles s'expriment d'une manière analogue, à la condition toutefois de regarder comme imaginaires leurs ordonnées parallèles au diamètre de contact avec BB', comme réelles les distances de leurs pieds aux extrémités du diamètre conjugué, de projeter ces diverses droites sur les axes AA' et BB', et de chercher le rapport des projections ainsi obtenues.

Concluons de là que l'hyperbole équilatère étant définie, une courbe dont l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre les distances de son pied à deux points fixes situés sur l'axe conjugué de sa direction n'est pas moins susceptible de généralisation que la circonférence. On voit aussi qu'il suffit de désigner le rayon de la courbe par $r$, son ordonnée réelle, imaginaire ou mixte par $y$, et la demi-somme des distances de son pied aux sommets correspondants par $x$ pour en conclure l'équation

$$y^2 = x^2 - r^2$$

de cette courbe.

Comme la circonférence, l'hyperbole équilatère offre diverses particularités suivant le mode de son rayon ou de son centre, et l'on sait que projetée sur un plan elle donne naissance à l'hyperbole quelconque.

On voit déjà par ces exemples que la conception des droites de modes contraires peut être d'un utile secours en géométrie supérieure, soit qu'elle permette de remplacer les coniques et leurs supplémentaires par de véritables lieux géométriques offrant toute l'unité désirable, soit qu'elle conduise à des constructions regardées jusqu'à présent comme

impossibles, telles que la description d'une circonférence de rayon ou de centre imaginaire. Cette même conception s'applique également aux courbes de degré quelconque : de plus en se prêtant à des démonstrations fondées sur la considération des figures elles-mêmes, elle permet de rattacher complétement la géométrie supérieure à l'analyse ancienne. C'est ce que je vais indiquer en peu de mots.

Je prendrai pour exemple le cas d'une circonférence et d'une droite qui ne se rencontrent qu'en deux points imaginaires.

Fig. 49

Soient donc O et MN la circonférence et la droite données ; la corde commune à ces deux lignes ne peut avoir d'autre direction que MN ; le diamètre conjugué de cette direction pour la circonférence est OP perpendiculaire à MN. Donc P est le milieu de la corde commune. Quant aux extrémités de cette corde elles sont les intersections de MN avec la branche hyperbolique de rayon OA. Inutile d'ailleurs de construire cette branche pour déterminer les points d'intersection cherchés ; car il suffit pour cela de prendre PO′ = OA, puis de décrire du point O′ comme centre avec un rayon égal à OP un arc de circonférence qui coupe MN aux points B,B′; et les points imaginaires (B,B′) et (B′,B) sont, d'après les propriétés de l'hyperbole équilatère, les points d'intersection demandés.

On sait que le produit des sécantes menées du point N à la circonférence O est constant, et que NC étant une tangente à la circonférence et NEF une sécante diamétrale, on a en particulier.

$$NE \times NF = \overline{NC}^2$$

si l'on mène le rayon de contact OC ainsi que la perpendiculaire CG à OF on sait aussi que ces droites antiparallèles donnent

$$\overline{NC}^2 = NG \times NO$$

en sorte que NO étant la demi-somme des droites NE, NF, leur moyenne harmonique est NG. Ces propriétés subsistent pour les points (B, B') et (B', B),

En effet, on a d'abord pour le produit des distances du point N à ces deux points

$$(NP + PBi)\,(NP + PB'i) = \overline{NP}^2 + \overline{PB}^2$$

mais d'après les propriétés absolues de l'hyperbole équilatère on sait que

$$\overline{PB}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2$$

Donc

$$\begin{aligned}(NP + PBi)\,(NP + PB'i) &= \overline{NP}^2 + \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2\\ &= \overline{NO}^2 - \overline{OA}^2\\ &= NE \times NF\\ &= \overline{NC}^2\end{aligned}$$

soit de plus G' le point d'intersection de CG avec MN, les antiparallèles OP et GG' donnent

$$\begin{aligned}NP \times NG' &= NO \times NG\\ &= \overline{NC}^2\\ &= (NP + PBi)\,(NP + PB'i)\end{aligned}$$

et, comme NP est la demi-somme des distances du point N aux points (B, B') et (B', B), il en résulte que NG' est la moyenne harmonique de ces mêmes distances, ou que G' est le conjugué harmonique de N à l'égard des points (B, B') et (B', B) : ce qu'il fallait démontrer. La droite CG', lieu des points harmoniques conjugués de N par rapport à la circonférence O est, comme on sait, la *Polaire* de ce point.

Toutes les circonférences passant par les points imaginaires conjugués (M, M') et (M', M) (*fig.* 50) ont leurs centres C, C', sur la perpendiculaire élevée par l'origine O à la droite PP', direction de leur corde commune.

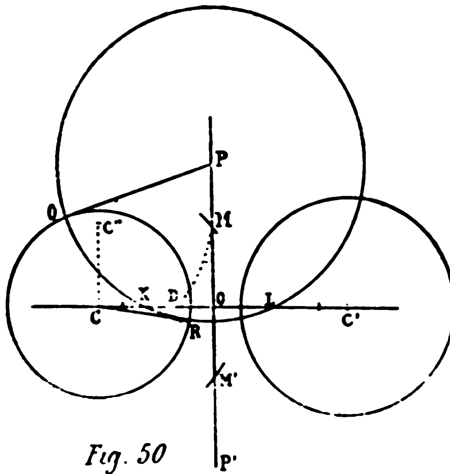


*Fig. 50*

Pour plus de brièveté je les appelle avec Poncelet circonférences de la suite C. Parmi elles, il en est deux qui sont infiniment petites, ce sont celles qui ont pour centres les points K et L obtenus en rabattant OM suivant OK et OL sur C'C.

Si d'un point quelconque P de la droite PP' on mène la tangente PQ à la circonférence C on a

$$\overline{PQ}^2 = (PO + OMi)(PO + OM'i)$$

et, comme cette même relation a lieu pour toutes les circonférences de la suite C, on en couclut que la droite PP' est l'axe radical de ces courbes, c'est-à-dire le lieu des points d'où l'on peut leur mener des tangentes égales.

Si l'on observe maintenant que

$$(PO + OMi)(PO + OM'i) = \overline{PO}^2 + \overline{OM}^2$$
$$= \overline{PK}^2$$

on voit que toutes les circonférences ayant leur centre sur PP', et qu'il convient d'appeler circonférences de la suite P passent par les points K, L, qui ne sont autres que les ***points limites*** considérés par Poncelet. Ainsi, se trouvent directement établies des propositions auxquelles l'illustre auteur du ***Traité des propriétés projectives des figures*** n'arrive en quelque sorte que par des chemins détournés.

Il y a plus, les propriétés qu'on vient de reconnaître aux circonférences de la suite C appartiennent également à celles de la suite P.

En premier lieu, si du point quelconque C de CC′ on mène la tangente CR à la circonférence P, on a

$$\overline{CR}^2 = CK \times CL$$

et comme cette relation subsiste pour toutes les circonférences de la suite P, on en conclut que CC′ est l'axe radical de ces courbes.

Mais parmi les circonférences de la suite P, il en est deux qui sont infiniment petites : ce sont celles qui ont respectivement (M, M′) et (M′, M) pour centres. Il est facile de prouver directement que ces deux points imaginaires sont à leur tour les points limites de la suite C, c'est-à-dire que toutes les circonférences de cette suite passent par ces deux points.

Effectivement, la distance du point C au point (M, M′), par exemple, est le rayon de la circonférence ayant le premier de ces points pour centre, et passant par le second. Pour construire ce rayon, il suffit de mener MC″ parallèle à CO jusqu'à sa rencontre en C″ avec la perpendiculaire CC″ à cette dernière droite, puis de décrire du point C″ comme centre avec C″M comme rayon un arc de cercle qui coupe CO en D : ce qui donne CD pour la distance cherchée. Mais on a par définition

$$\overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 + (OMi)^2$$

et comme

$$\begin{aligned}\overline{CO}^2 + (OMi)^2 &= \overline{CO}^2 - \overline{OM}^2 \\ &= \overline{CO}^2 - \overline{OK}^2 \\ &= CK \times CL \\ &= \overline{CR}^2\end{aligned}$$

on en conclut que CD = CR, ou plus généralement que toutes les circonférences de la suite C passent par les points (M, M′) et (M′, M)

Ainsi l'emploi des droites de modes contraires, loin de compliquer les démonstrations, les rend plus directes, plus intuitives, et permet en même temps de les appliquer à des figures plus ou moins rebelles aux procédés ordinaires. Peut-être s'en convaincra-t-on mieux encore par l'exemple suivant.

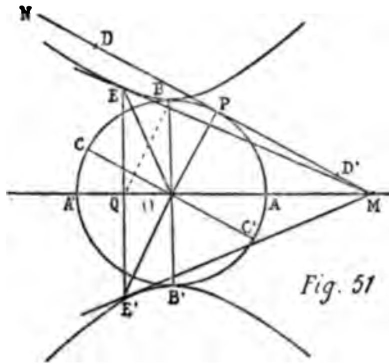


*Fig. 51*

Soit O une circonférence de rayon imaginaire OA$i$ (*fig.* 51) et M un point réel situé dans son plan.

De toutes les droites réelles issues du point M, il n'en est qu'une seule capable de couper la branche circulaire : c'est la droite MO qui rencontre cette branche aux points (A,A') et (A',A). Le produit des sécantes correspondantes est:

$$(MO + OAi)\,(MO + OA'i) = \overline{MO}^2 + \overline{OA}^2$$

Si l'on mène le rayon OB perpendiculaire à OA, ce produit peut évidemment s'exprimer par $\overline{MB}^2$.

Pour trouver les points d'intersection de la circonférence avec la droite quelconque MN, on observe que la conjuguée qui rencontre cette droite doit avoir pour diamètre la droite réelle OP perpendiculaire à MN : Cette conjuguée n'est donc autre que la branche hyperbolique ayant son diamètre CC' parallèle à MN. Si l'on décrit de P comme centre avec PC comme rayon un arc de cercle coupant MN aux points D et D', les points d'intersection cherchés sont (D,D') et (D',D). Or on a

$$(MP + PD\,i)\,(MP + PD'i) = \overline{MP}^2 + \overline{PD}^2$$

Mais d'après les propriétés absolues de l'hyperbole CC', on sait que

$$\overline{PD}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OA}^2$$

Donc

$$\begin{aligned}(MP + PDi)\,(MP + PD'i) &= \overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 + \overline{OA}^2 \\ &= \overline{MO}^2 + \overline{OA}^2 \\ &= \overline{MB}^2\end{aligned}$$

ou, en d'autres termes,

$$(MP + PDi)\,(MP + PD'i) = (MO + OAi)\,(MO + OA'i)$$

Ainsi, la propriété des sécantes ne cesse pas d'avoir lieu pour une circonférence de rayon imaginaire.

La nature de la circonférence O ne permet pas de lui mener du point M un tangente réelle. Mais rien n'empêche de lui mener de ce même point deux tangentes imaginaires. Ce sont les droites ayant pour centre le point M et touchant l'hyperbole BB' la première au point (E,E'), la seconde au point (E',E). Il reste à prouver que ces deux droites jouissent des mêmes propriétés que les tangentes à une circonférence réelle, c'est-à-dire : 1° que la circonférence décrite sur MO comme diamètre passe par les points de contact (E,E') et (E',E) ; 2° que le carré de la distance du point M à l'un des points de contact est égal au produit de deux sécantes quelconques issues de ce même point M.

Or, si l'on mène l'ordonnée de contact QE$i$ et le diamètre O (E,E') conjugué de la tangente M (E,E') on sait que les deux angles EOA' et EMA' sont complémentaires. Donc EMA=OEQ. Par suite, la similitude des triangles MQE et OQE donne

$$\frac{QO}{QE} = \frac{QE}{QM}$$

d'où

$$\overline{QE}^2 = QO \times QM$$

On a donc aussi,

$$-(QEi)^2 = QO \times QM$$

En d'autres termes, le point (E,E') appartient à la circonférence décrite sur OM comme diamètre.

En second lieu, le carré de la tangente M (E,E') ou plutôt le carré de la distance $d$ du point M au point (E,E') est

$$\begin{aligned} \overline{d}^2 &= \overline{MQ}^2 + (QEi)^2 \\ &= \overline{MQ}^2 - \overline{QE}^2 \end{aligned}$$

Mais, si l'on tire QB = QE, on a aussi

$$\overline{QB}^2 = \overline{QE}^2 = QO \times QM$$

Donc le triangle QBM est rectangle et l'on en conclut

$$\begin{aligned} \overline{MB}^2 &= \overline{MQ}^2 - \overline{QB}^2 \\ &= \overline{MQ}^2 - \overline{QE}^2 \\ &= d^2 \end{aligned}$$

Mais on se rappelle que

$$(MP + PDi)\,(MP + PD'i) = \overline{MB}^2$$

Le produit des sécantes issues du point M est donc bien égal au carré de la tangente M (B,B').

Concluons de là qu'il est non-seulement possible de généraliser les propriétés de la circonférence réelle, mais encore de les étendre à la circonférence de rayon imaginaire. On verrait de même que ces propriétés subsistent, quelque soit le mode du centre ou du rayon. Aussi, regarderai-je ce principe comme établi dans ce qui me reste à dire des triangles et des relations métriques auxquelles ils donnent lieu.

Un triangle ordinaire ABC a pour sommet les points réels A,B,C, et pour côtés leurs mutuelles distances. Mais si l'on considère sur un plan trois points de mode quelconque non situés en ligne droite, comme, d'après ce qui précède, on peut toujours en trouver les distances, lesquelles sont suivant les cas, réelles imaginaires ou mixtes, il est naturel d'étendre la dénomination de triangle à une pareille figure. C'est ce que je vais faire en conservant aux trois points le nom de sommets et à leurs distances celui de côtés.

Soit, par exemple , A (*fig.* 52) un angle réel. Si du point B pris sur un de ses côtés je mène BM perpendiculaire à l'autre côté, et que du point B comme centre avec un rayon BB' moindre que BM, je décrive une circonférence, celle-ci rencontre AM aux deux points imaginaires

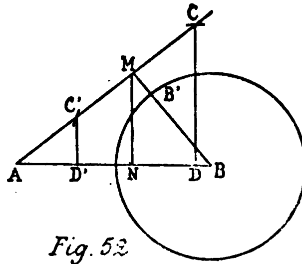


Fig. 52

(C,C′) et (C′,C). De là deux triangles AB (C,C′) et AB (C′,C) ayant deux côtés communs AB, BB′, et dont le troisième côté est AM + MC*i* pour l'un, AM + MC′*i* pour l'autre. De même, si des points A et B comme centres (*fig.* 53) avec les rayons réels AA′ et BB′, dont la somme est moindre que AB, je décris deux circonférences, celles-ci par leurs intersections en (C,C′) et (C′,C) donnent naissance aux triangles AB (C,C′) et AB (C′,C) qui ont leurs trois côtés AA′, BB′ et AB réels, etc.

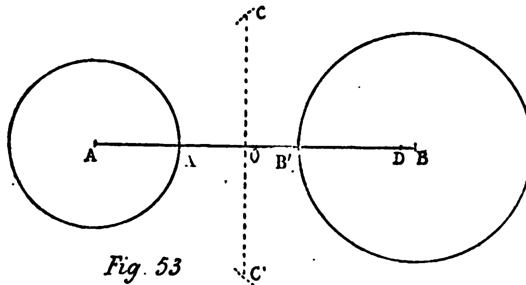


Fig. 53

Il me reste à montrer que les relations numériques fournies par ces nouvelles figures sont de même forme que celles qui résultent de la considération des triangles ordinaires,

Soient d'abord AB $= c$, BB′ $= a$ et A M + MC*i* $= b + \beta i$ les côtés du triangle AB (C,C′) (*fig.* 52). Si des points M et (C,C′) on mène les perpendiculaires MN et (C,C′) (D,D′) sur AB, la projection de AM + MC*i* sur cette dernière droite est AN+ND*i* $= m + ni$. Qu'on décrive maintenant une circonférence du point (C,C′) comme centre avec $b+\beta i$ pour rayon, cette courbe passe par le point A et coupe AB en un second point qui est imaginaire, et dont la distance au point A est évidemment double de AN + ND*i*. Les distances des deux points d'intersection au point B étant respectivement $c$ et $c - 2\,(m + ni)$, leur produit est

$$c\,[\,c - 2\,(m + ni)\,] = c^2 - 2c\,\,(m + ni)$$

D'ailleurs, la circonférence (C,C′) coupe BM en deux points imaginaires, symétriques par rapport à (C,C′) et dont les distances à ce dernier point sont égales l'une et l'autre à $b + \beta i$. De plus, comme la distance du point B au point (C,C′) est $a$, les distances de ce même point B aux deux points d'intersection dont il s'agit sont respective-

ment $a+b+\beta$, $a-b-\beta$; la demi-somme de ces distances étant $a$ et leur demi-différence $b+\beta$, leur produit est donc

$$a^2 - (b + \beta i)^2$$

mais d'après la propriété des sécantes, on a

$$a^2 - (b + \beta i)^2 = c^2 - 2\,c\,(m + ni)$$

Donc enfin

$$a^2 = (b + \beta i)^2 + c^2 - 2\,c\,(m + ni)$$

Soient, en second lieu, $AB = c$, $AA' = b$ et $BB' = a$, les côtés du triangle AB (C,C') (*fig.* 53) si du point (C,C') je mène la perpendiculaire CO$i$ a AB, la projection de AA' sur cette dernière droite est la droite réelle $AO = m$. Je décris ensuite du point (C,C') comme centre avec $b$ pour rayon une circonférence qui passe par le point A et coupe AB en un second point D. Ce dernier point étant symétrique de A par rapport à O, on a

$$AD = 2\,AO = 2\,m$$

et par suite le produit des distances du point B aux points A et D est

$$c\,(c - 2m) = c^2 - 2cm.$$

D'ailleurs, la circonférence (C,C') coupe aussi BB' et son prolongement aux points D et A. Comme les distances de ces derniers points à (C,C') sont égales l'une et l'autre à $b$, et que $BB' = a$ est la distance de (C,C') à B, les sécantes correspondantes issues de B ont pour demi-somme $a$, pour demi-différence $b$, leur produit est donc

$$a^2 - b^2.$$

Mais d'après la propriété des sécantes on a

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2cm.$$

Donc enfin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm.$$

Ainsi, les droites de modes contraires n'ont pas seulement pour effet d'accroître le nombre des figures groupées sous le nom de triangle, elles permettent encore d'exprimer par une seule et même relation les propriétés métriques de ces figures. On jugera par ces exemples de l'extension nouvelle à donner au principe de la corrélation des figures. J'ajoute qu'il est également facile, comme on le verra plus loin, de généraliser la notion d'angle, et je passe à une dernière application géométrique des points et des droites de modes quelconques.

On sait que les foyers d'une conique peuvent être considérés comme les centres de circonférences infiniment petites ayant avec cette conique un double contact. Déterminons, en nous plaçant à ce point de vue, les foyers de la circonférence et de l'hyperbole équilatère.

Une circonférence infiniment petite ayant tous ses diamètres perpendiculaires à leurs cordes conjuguées ne peut être tangente qu'à une branche de courbe offrant un diamètre du même genre. De plus, les points de cette branche doivent être imaginaires : enfin, les cordes de contact qu'il importe de distinguer des droites ou polaires dont elles font partie, sont tantôt imaginaires et tantôt réelles, mais leurs diamètres conjugués sont toujours du mode contraire, c'est-à-dire réels dans un cas, imaginaires dans l'autre.

Or, à la simple inspection d'une circonférence de centre et de rayon réels, on voit de suite que la circonférence infiniment petite qui lui est concentrique et dont les branches sont asymptotes aux siennes, est la seule qui puisse lui être tangente : encore, les points de contact et les polaires correspondantes sont-ils à l'infini. Une circonférence réelle n'a donc pas d'autre foyer que son centre.

Soit maintenant à résoudre la même question pour l'hyperbole équilatère de centre O et de rayon OA. Si cette courbe touche une circonférence infiniment petite en deux points, ceux-ci ne peuvent appartenir qu'à la conférence conjuguée de l'hyperbole. De plus, si le foyer cherché est réel, il doit se trouver sur AA′ prolongé. Supposons le problème résolu, et soient P ce foyer, (M,M′) et (M′,M) les points de contact correspondants. Bien que ces points soient imaginaires, la polaire MM′ est réelle ainsi que sa

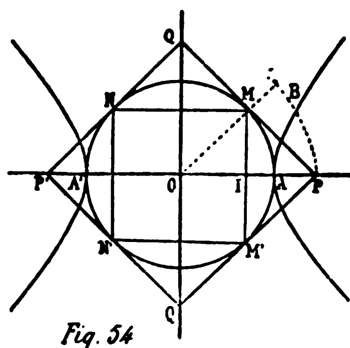


*Fig. 54*

distance au centre OI, et comme le triangle OMP est isocèle en même temps que rectangle, on a évidemment OP = OA $\sqrt{2}$. Pour construire le foyer P et sa polaire MM' il suffit donc de mener à OA, la perpendiculaire AB = OA, puis de rabattre OB sur AA' suivant OP et de tirer l'une des tangentes P (M,M') ou P (M',M) à la branche circulaire. En rabattant OB suivant OP', on trouve un second foyer réel P' symétrique de P par rapport au centre O; et la polaire NN' de ce second foyer est de même symétrique de MM' par rapport à l'axe QQ' perpendiculaire en O à AA'. Enfin, QQ' étant coupé par les tangentes issues de P ou de P' aux points (Q,Q') et (Q',Q) on reconnaît immédiatement que ces deux points imaginaires sont de nouveaux foyers de l'hyperbole. En effet, (Q,Q') est le centre d'une circonférence infiniment petite tangente à la branche circulaire aux points (M,M') et (N,N') en sorte que la polaire correspondante est la droite (M,M') (N,N') dont les branches sont parallèles à AA'. De même (Q',Q) est le centre d'une seconde circonférence infiniment petite tangente à la branche circulaire aux points, (M',M') et N',N) et dont la corde de contact est par suite la droite (M',M) (N',N). En résumé, l'hyperbole équilatère a quatre foyers dont deux sont réels et les deux autres imaginaires. Les premiers sont situés sur AA', de part et d'autre du point O, à la distance OA$\sqrt{2}$, les autres sur QQ', de part et d'autre du même point, mais à la distance OA $i$ $\sqrt{2}$; enfin, les quatre polaires correspondantes sont réelles bien que leurs composantes ne restent pas toujours superposées. Ces résultats s'accordent d'ailleurs avec le calcul.

Les considérations dans lesquelles je viens d'entrer montrent assez, je pense, avec quelle facilité les droites de modes contraires se plient à toutes les exigences de la géométrie supérieure. Il me reste à dire quelques mots des procédés uniformes qu'entraîne l'emploi de ces mêmes droites pour la détermination des racines des équations algébriques; je prendrai pour exemple la résolution graphique des équations à une inconnue du second et du troisième degré.

Soit d'abord proposé de déterminer géométriquement les racines de l'équation.

$$x^2 + ax + b^2 = o$$

La question se réduit, comme on sait, à trouver deux droites dont la somme soit $a$ et la moyenne proportionnelle $b$.

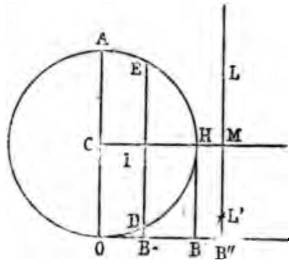


Fig. 55

Si l'on a $b < \frac{a}{2}$, sur OA $= a$ comme diamètre on décrit une demi-circonférence à laquelle on mène la tangente OB $= b$ ; on tire ensuite la sécante BDE parallèle à OA, et les droites cherchées sont BD et BE.

En effet, on a d'abord :

$$BD \times BE = OB^2 = b^2$$

et si l'on mène à DE la perpendiculaire CI, comme BI $=$ OC est la demi-somme des droites BD, BE, on en conclut

$$BD + BE = 2\,BI = a$$

Lorsque $b = \frac{a}{2}$ les deux droites cherchée sont égales chacune à B'H.

Enfin, si l'on a $b > \frac{a}{2}$ et égal à OB'', la même figure permet encore de trouver les droites cherchées. En effet, si l'on détermine d'un seul coup de compas, comme on l'a vu plus haut, les intersections (L,L') et (L'L) de la circonférence C avec la perpendiculaire B''M à OB'', les racines demandées sont B''M $+$ ML$i$ et B''M $+$ ML'$i$ puisqu'on a par construction

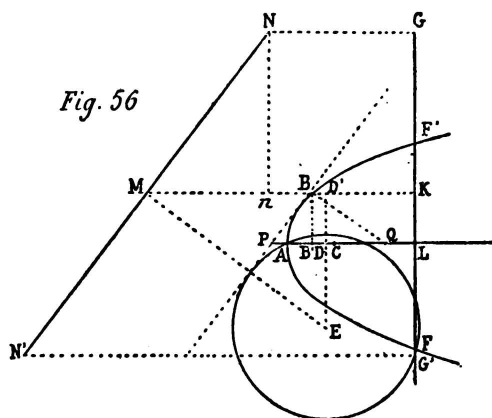
$$(B''M + MLi)\,(B''M + ML'i) = \overline{OB''}^2 = b^2$$

$$B''M + MLi + B''M + ML'i = 2\,B''M = a.$$

Soit maintenant à résoudre graphiquement l'équation

$$x^3 + px + q = o$$

Dans l'hypothèse où cette équation n'admet qu'une racine réelle, celle-ci est négative comme étant de signe contraire à la valeur positive $q$, je la désigne par $-\alpha$ et pour la construire je décris avec Descartes la parabole A (*fig.* 56) dont le côté droit est égal à l'unité, puis je prends sur l'axe même de la courbe les longueurs, $AC=\frac{1}{2}$, $CD=\frac{1}{2}p$ en D j'élève à AD la perpendiculaire $DE=\frac{1}{2}q$, et je décris du point E comme centre avec EA pour rayon une circonférence qui coupe la parabole en F ; LF ordonnée de ce point n'est autre que $-\alpha$, ainsi que l'a fait voir Descartes. Il reste à construire les deux autres racines, problème dont notre grand géomètre regardait la solution comme impossible.




A cet effet, par le milieu K de $LF'=\alpha$, je tire KB parallèle à LA : je mène par le point B la tangente BP à la parabole, j'abaisse EM perpendiculaire à cette tangente, jusqu'à sa rencontre en M avec le diamètre KB, puis, je détermine les points d'intersection (N,N') et ($N'$,$N$) de la circonférence E avec la perpendiculaire en M à EM ; enfin, je tire la parallèle (N,N') (GG') à KM jusqu'à sa rencontre en (G,G') avec la direction de LF, et je dis que $LK+KGi$, $LK+KG'i$ sont les deux racines cherchées.

Pour le prouver, je commence par faire voir que M est le milieu d'une corde imaginaire commune à la circonférence E et à la parabole.

Soient, en effet, BB' l'ordonnée du point de contact, P et Q les points d'intersection de la tangente BP et de la normale BQ avec l'axe AL, on a par construction.

$$BB'=\frac{\alpha}{2}, \ PB'=2AB'=2\overline{BB'}^2=\frac{\alpha^2}{2}, \ B'Q=\frac{1}{2}$$

et par suite

$$PQ = \frac{1}{2}(1 + \alpha^2), \ BP = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{1+\alpha^2}, \ BQ = \frac{1}{2}\sqrt{1+\alpha^2}$$

De plus, si l'on prolonge ED jusqu'à sa rencontre en D′ avec KM, il vient

$$ED' = \frac{1}{2}(\alpha + q)$$

Mais la similitude des triangles MED′ et PQB donne

$$\frac{EM}{PQ} = \frac{D'M}{BQ} = \frac{ED'}{BP}$$

ou

$$\frac{EM}{\frac{1}{2}(1+\alpha^2)} = \frac{D'M}{\frac{1}{2}\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{q+\alpha}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}$$

et l'on en tire

$$EM = \frac{q+\alpha}{2\alpha}\sqrt{1+\alpha^2} \quad D'M = \frac{q+\alpha}{2\alpha}$$

Cela posé, puisque ED $= \frac{1}{2} q$ et AD $= \frac{1}{2}(1-p)$ ou on en conclut pour le rayon

$$EA = \frac{1}{2}\sqrt{(1-p)^2 + q^2}$$

et comme la circonférence E passe par les points (N,N′) et (N′,N) on a

$$(MNi)^2 = \frac{(1-p)^2 + q^2}{4} - \frac{(1+\alpha^2)(q+\alpha)^2}{4\alpha^2}$$

ou, en développant et remarquant que $q = \alpha^3 + p\alpha$.

$$(MNi)^2 = -(1+\alpha^2)\left(\frac{3\alpha^2}{4}+p.\right)$$

Or, la conjuguée B de la parabole a pour double paramètre $2PQ = 1+\alpha^2$. De plus, cette conjuguée rencontre la direction MN en deux points imaginaires dont l'abscisse est

$$\begin{aligned} BM &= -(D'M - AD + AB') \\ &= -\left(\frac{q+\alpha}{2\alpha} - \frac{1-p}{2} + \frac{\alpha^2}{4}\right) \end{aligned}$$

ou en développant et simplifiant comme plus haut

$$BM = -\left(\frac{3\alpha^2}{4}+p\right)$$

Le carré de chaque ordonnée correspondant à cette abscisse est donc

$$-(1+\alpha^2)\left(\frac{3\alpha^2}{4}+p\right)$$

En d'autres termes les points d'intersection cherchés ne sont autres que (N,N') et (N',N). Ainsi la circonférence E et la parabole A ont une corde commune dont le milieu est M.

Ce premier point démontré, j'observe que la longueur de MN est

$$MN = \sqrt{(1+\alpha^2)\left(\frac{3\alpha^2}{4}+p\right)}$$

et je mène N$n$ perpendiculaire à KM. La similitude des triangles MN$n$ et BPB' me donne alors

$$\frac{Nn}{BB'} = \frac{MN}{BP}$$

d'où

$$Nn = \frac{MN \times BB'}{BP} = \sqrt{\frac{3\,\alpha^2}{4} + p}$$

j'ai donc en définitive

$$LK + KGi = \frac{\alpha}{2} + i\sqrt{\frac{3\,\alpha^2}{4} + p}$$

$$LK + KG'i = \frac{\alpha}{2} - i\sqrt{\frac{3\,\alpha^2}{4} + p}$$

Je dis maintenant que ces deux valeurs jointes à LF $= - \alpha$ constituent les trois racines de l'équation proposée. En effet, on sait que la somme de ces trois racines doit être nulle, que celle de leurs produits deux à deux doit être égale à $p$, et le produit de ces mêmes racines égal à $- q$. Or, on a déjà

$$LK + KGi + LK + KG'i + LF = o$$

De plus, comme

$$(LK + KGi)\,(LK + KG'i) = \alpha^2 + p$$

$$LF\,(LK + KGi) = -\frac{\alpha^2}{2} - \alpha i\sqrt{\frac{3\,\alpha^2}{4} + p}$$

$$LF\,(LK + KGi') = -\frac{\alpha^2}{2} + \alpha i\sqrt{\frac{3\,\alpha^2}{4} + p}$$

On en conclut que la somme de ces trois produits est $p$. Enfin on a aussi :

$$(LK + KGi)\,(LK + KG'i)\,LF = -(\alpha^2 + p)\,\alpha = -q$$

Le problème est donc résolu.

Si l'on compare les solutions précédentes à celles du même genre que

fournissent les quantités complexes, on verra que les secondes sont loin d'offrir comme les premières, une très-grande analogie de construction avec les solutions réelles correspondantes.

J'aurais pu d'ailleurs traiter plus simplement la résolution graphique de l'équation du troisième degré, mais il m'a paru convenable de prouver que la parabole et la circonférence se coupaient en deux points imaginaires conjugués.

---

# APPLICATIONS.

## CHAPITRE II.

### APPLICATIONS ALGÉBRIQUES.

**SOMMAIRE.** — Extension du système de coordonnées de Descartes, aux points imaginaires. — Interprétation géométrique des équations à deux ou trois variables.— Construction géométrique de lieux plans du 1er ou du 2e degrés — Changements d'axes. — Remarques sur les valeurs à donner aux variables indépendantes. — Application à l'équation de la parabole. — Expression analytique de la distance de deux points. — Aires planes de modes quelconques et en particulier des rectangles à dimensions réelles, imaginaires ou mixtes. — Angles réels, imaginaires ou mixtes. — Généralisation des formules de la trigonométrie plane. — Logarithmes des nombres et leurs périodes. — Démonstration géométrique des formules d'Euler. — Résolution graphique de l'équation binôme. — Aire comprise entre un arc de courbe, ses ordonnées extrêmes et l'axe des abscisses. — Application à l'intégrale logarithmique. — Discussion de Leibnitz et de Bernouilli à propos des logarithmes des nombres négatifs. — Preuves apportées par Euler. — La question demeure indécise pour d'Alembert. — Démonstrations de Cauchy et de M. Marie comparées à celle qui résulte de l'emploi des lignes de modes quelconques.

On sait que l'idée de déterminer, au moyen de deux nombres, la position d'un point sur un plan est due à Descartes.

Soient $xx'$, $yy'$, deux axes quelconques se coupant à l'origine O et M un point situé dans l'angle $yox$. Si l'on tire MP parallèle à $yy'$ jusqu'à sa rencontre en P avec $xx'$, les droites MP, OP, nommées la première, *ordonnée*, la seconde *abscisse*, suffisent pour déterminer le point M, quelle que soit la position de ce point dans l'angle $yox$; mais dès qu'on veut

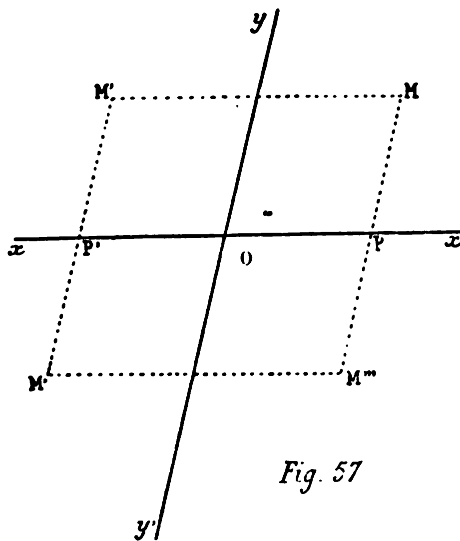


Fig. 57

sortir de cet angle, il est nécessaire, pour éviter toute ambiguïté, de substituer aux coordonnées absolues MP, OP, des droites susceptibles d'un sens, et de regarder comme positive une abscisse de sens $ox$ ou une ordonnée de sens $oy$, et comme négative une abscisse de sens $ox'$, ou une ordonnée de sens $oy'$. En désignant par $a$ les longueurs OP $=$ OP', et par $b$ les longueurs MP $=$ M'P' $=$ M''P' $=$ M'''P, on trouve ainsi pour coordonnées du point M et des points qui lui sont symétriques relativement aux axes où à l'origine.

| | | |
|---|---|---|
| M | $x=+a$ | $y=+b$ |
| M' | $x=-a$ | $y=+b$ |
| M'' | $x=-a$ | $y=-b$ |
| M''' | $x=+a$ | $y=-b$ |

Il est vrai qu'on ne considère de la sorte que des points réels.

Le système de coordonnées rectilignes resterait donc fort incomplet s'il ne se prêtait pas à la représentation des points imaginaires. Mais pour combler une pareille lacune, il suffit d'introduire dans ce système les points et droites de modes quelconques, tels que je les ai définis. Qu'on transforme, en effet, la somme de deux droites réelles ou imaginaires en une brisée, et l'extrémité de celle-ci aura pour abscisse la première partie de la somme et pour ordonnée la seconde partie. En d'autres termes, si l'on regarde l'abscisse et l'ordonnée d'un point comme ayant toujours deux composantes, et si l'on a soin d'associer constamment entre elles la première composante de l'abscisse avec la première composante de l'ordonnée, on peut déterminer d'une manière pré-

cise la position de tout point réel ou imaginaire, situé dans le plan des axes. C'est ainsi qu'outre les points réels M, M′, M″, M‴ dont les composantes se trouvent superposées, la figure nous offre les points imaginaires:

| | | |
|---|---|---|
| (M,M‴) | $x = + a$ | $y = + bi$ |
| (M‴,M) | $x = + a$ | $y = - bi$ |
| (M′,M″) | $x = - a$ | $y = + bi$ |
| (M″,M′) | $x = - a$ | $y = - bi$ |
| (M,M′) | $x = + ai$ | $y = + b$ |
| (M′,M) | $x = - ai$ | $y = + b$ |
| (M‴,M″) | $x = + ai$ | $y = - b$ |
| (M″,M‴) | $x = - ai$ | $y = - b$ |
| (M,M″) | $x = + ai$ | $y = + bi$ |
| (M″,M) | $x = - ai$ | $y = - bi$ |
| (M‴,M′) | $x = + ai$ | $y = - bi$ |
| (M′,M‴) | $x = - ai$ | $y = + bi$ |

*Fig. 58*

S'agit-il encore des points imaginaires conjugués (N,N′) et (N′,N) (*fig.* 58), il est aussi facile de leur assigner des coordonnées qui les distinguent des autres points du plan. Seulement ces coordonnées sont mixtes. En effet, si du point (N,N′) on mène (N,N′) (R,R′) parallèle à $yy'$, cette parallèle est l'ordonnée du point considéré, et l'abscisse correspondante est la droite mixte O (R,R′). De même (N′,N) a pour ordonnée (N′,N)(R′,R) et pour abscisse O(R′,R). Veut-on maintenant évaluer ces nouvelles coordonnées : il suffit, pour cela, d'observer que le point milieu M des composantes N et N′ est réel, ainsi que le pied P de la parallèle menée de ce point à $yy'$ ; en sorte que $OP = a$ est la partie réelle de chaque abscisse et $PM = b$ la partie réelle de chaque ordonnée, comme, de plus, P est le milieu de RR′, $PR' = \beta i$ et $PR'i = - \beta i$ sont les projections sur $xx'$ des droites M N $i$ et M N′ $i$.

Enfin, $MQi = -\beta i$ et $MQ'i = \beta i$ étant les projections des mêmes droites sur PM, on a pour déterminer les points proposés :

$$(N,N') \qquad x = a + \alpha i \quad y = b - \beta i$$
$$(N'N,) \qquad x = a - \alpha i \quad y = b + \beta i,$$

et l'on voit assez par là comment se trouveraient les coordonnées de tout autre point du plan.

Si l'on désigne par $x$ une abscisse variable, et par $y$ l'ordonnée correspondante, on sait que toute ligne plane géométriquement définie s'exprime par une équation algébrique ou transcendante $f(x,y) = 0$, et que, réciproquement, toute équation de ce genre représente une ligne ou un ensemble de lignes dont les points se succèdent suivant une loi déterminée. Mais, lorsqu'on se borne à l'emploi de coordonnées réelles, il n'y a guère que le lieu de l'équation du premier degré à deux variables, c'est-à-dire la ligne droite, qui s'étende indéfiniment dans le plan des axes, tandis que le lieu d'une équation de degré supérieur n'occupe généralement que certaines régions de ce plan, ou même n'existe pas du tout, ces anomalies disparaissent, et la ligne droite elle-même s'enrichit de nouveaux points, dès qu'on a recours aux coordonnées de modes quelconques. La géométrie pure l'a déjà fait pressentir ; quelques exemples suffiront pour le prouver.

Soit d'abord :

$$y = mx + n$$

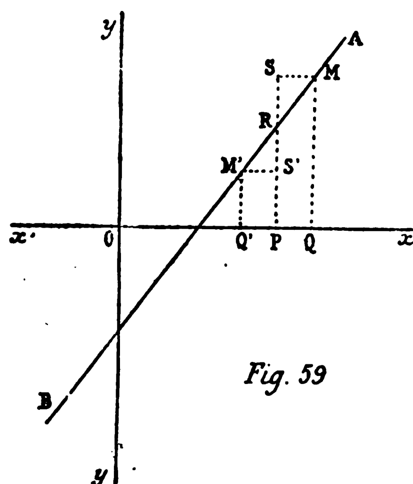


Fig. 59

Une équation du premier degré à deux variables. Le lieu de cette équation, relativement aux axes $xx'$, $yy'$, que, pour plus de simplicité, je supposerai rectangulaires, est une droite réelle AB, tant qu'on ne donne à $x$ que des valeurs réelles. Mais si l'on suppose (*fig.* 59)

$$x = OP + PQ\,i = a + bi$$

la valeur correspondante de $y$ étant

$$y = m(a + bi) + n$$

il reste à construire le point déterminé par ces coordonnées mixtes, et les points analogues. Or, en menant les ordonnées PR, (QQ') (M,M') jusqu'à leur rencontre avec AB, on voit d'abord que

$$\text{PR} = ma + n.$$

De plus, le point (M,M') a ses composantes équidistantes de R; enfin, si l'on coupe PR par la parallèle (M,M') (S,S') à $xx'$, on a évidemment :

$$\text{RS} = \text{RS}' = mb$$

d'où

$$\text{RS}\,i = mbi$$

et par suite

$$y = m(a + bi) + n = \text{PR} + \text{RS}i.$$

Il ne reste plus qu'à associer les composantes de cette ordonnée avec celles de même ordre de l'abscisse $x = \text{OP} + \text{PQ}i$ pour construire le point cherché; et l'on trouve de la sorte le point imaginaire (M,M') situé sur AB. On obtient de même le point (M',M) en donnant à $x$ la valeur $a - bi$. Il suffit d'ailleurs de faire varier PQ $i$ ou PQ' $i$ pour trouver une infinité de points imaginaires analogues aux précédents. Enfin, si la droite OP varie à son tour, chaque point réel de AB devient le centre d'une infinité de cordes imaginaires résultat qui s'accorde avec ce qu'on a vu dans le chapitre précédent.

Soit en second lieu à interpréter

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

Si l'on met cette équation sous la forme

$$-y^2 = (x - r)(x + r)$$

on voit que la question revient à trouver, quelle que soit $x$, deux ordonnées symétriques entre les droites $x + r$, et $x - r$. Le lieu cherché est

donc une circonférence dont nous allons successivement déterminer la branche réelle et les conjuguées.

Soient prises sur $xx'$ les longueurs OA = OA' = $r$. Pour toute valeur $x$ = OL moindre que OA ou plus grande que l'abscisse négative OA', les droites $x + r$, $x - r$, sont réelles et de sens contraires; les ordonnées correspondantes LC et LC' sont donc réelles, et les points C, C', font partie de la circonférence réelle décrite sur AA' comme diamètre.

Pour toute valeur réelle $x$ = OM plus grande que OA ou moindre que OA', les droites $x + r$, $x - r$, sont réelles et de même sens; les ordonnées symétriques correspondantes sont donc imaginaires: ce sont les droites MD$i$ et MD'$i$; les points imaginaires (D,D') et (D',D) qu'elles déterminent appartiennent à la branche hyperbolique AA', conjuguée de la circonférence réelle, et l'on sait qu'on peut aisément obtenir ces deux points sans construire la branche elle-même.

Supposons maintenant

$$x = \text{OP} - \text{PQ}i = -a + bi:$$

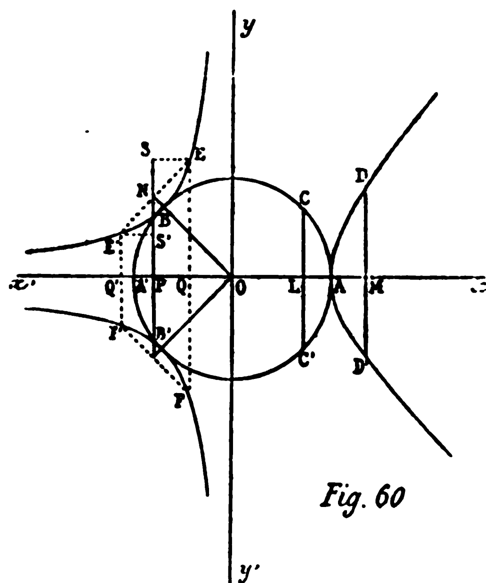


*Fig. 60*

les droites $x + r$, $x - r$, sont l'une et l'autre mixtes, et il en est de même des ordonnées correspondantes. Pour construire ces dernières supposons d'abord les points cherchés connus, et soit (E,E') un de ces points. Comme il appartient à la branche hyperbolique B, dont le diamètre ON est réel; si l'on mène les perpendiculaires NP, EQ à $xx'$ et la parallèle (E,E') (S,S') à ce même axe, puis, qu'on regarde les droites de la figure comme absolues, on a:

$$\overline{NS}^2 + \overline{ES}^2 = \overline{NE}^2$$
$$= \overline{ON}^2 - \overline{OA}^2$$
$$= \overline{PN}^2 + \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2$$

d'où, à cause de ES $=$ PQ,

$$\overline{PN}^2 - \overline{NS}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{PQ}^2 - \overline{OP}^2 = c^2$$

la droite $c$ étant facile à construire.

Mais la similitude des triangles NES et OPN donne

$$\frac{PN}{PQ} = \frac{OP}{NS}$$

et par suite

$$PN \times NS = OP \times PQ$$

ou en désignant par $a$ la moyenne proportionnelle entre OP et PQ

$$PN \times NS = a^2$$

La question est donc ramenée à trouver deux droites PN et NS dont la différence des carrés soit $c^2$ et la moyenne proportionnelle $a$ : ou, en d'autres termes à chercher un triangle rectangle connaissant le côté $c$ de l'angle droit et la moyenne proportionnelle $a$ entre l'hypothénuse et l'autre côté.


*Fig. 61*

A cet effet, je construis d'abord une troisième proportionnelle AB $= \frac{a^2}{c}$ aux droites $c$ et $a$. Je lui mène la perpendiculaire AI $= \frac{c}{2}$, je détermine les droites BP et BS dont la différence est PS $= 2Ai = c$, et la moyenne proportionnelle AB $= \frac{a^2}{c}$ ; puis je construis la moyenne proportionnelle NS entre PS et BS, je tire PN, et PNS est le triangle demandé.

En effet, on a d'abord par construction.

$$\overline{PN}^2 - \overline{NS}^2 = c^2.$$

De plus, si l'on tire BN, la similitude des triangles PNS et BNS donne

$$\frac{PN}{PS} = \frac{BN}{NS}$$

d'où

$$PN \times NS = PS \times BN$$

Mais, par construction,

$$\overline{BN}^2 = BP \times BS$$
$$= \overline{AB}^2$$

Donc, enfin,

$$PN \times NS = PS \times AB$$
$$= c \times \frac{a^2}{c}$$
$$= a^2$$

L'ordonnée $y = PN + NSi$ étant ainsi déterminée, on construira le point (E,E'), aussi bien que son symétrique (F,F') et la même construction fournira de plus les points (E',E) et (F'F,) qui répondent à

$$x = OP + PQ'i = -(a + bi)$$

On voit d'ailleurs que pour obtenir la conjuguée B tout entière, il suffira de déterminer les intersections de la circonférence avec une droite mobile parallèle à EE', c'est-à-dire d'assigner à $x$ des valeurs mixtes d'une forme convenable. Quant aux autres conjuguées du lieu elles se trouveront par le même procédé.

Les constructions précédentes et toutes celles du même genre perdraient de leur utilité si elles ne se trouvaient compatibles avec le changement d'axes. Mais on se convaincra facilement que les droites imaginaires ou mixtes se prêtent aussi bien que les droites réelles à une pareille transformation. Je dois néanmoins ici faire une remarque importante.

On vient de voir que, dans la construction d'un lieu, les valeurs de

l'abscisse sont complétement arbitraires tant qu'elles sont réelles, mais qu'il est indispensable de les assujettir à certaines conditions lorsqu'elles sont mixtes. C'est ainsi que pour obtenir sur une droite toutes les cordes imaginaires ayant le même centre réel, on ne fait varier que la partie imaginaire de l'abscisse, et que pour trouver les conjuguées d'une circonférence réelle, on n'assigne à cette abscisse que des valeurs mixtes ayant entre elles un rapport déterminé. La raison de ce fait est facile à découvrir.

Admettons, en effet, qu'après avoir construit dans le système rectangulaire $xx'$, $yy'$, la circonférence réelle O et sa conjuguée A, représentées l'une et l'autre par l'équation

$$y^2 + x^2 = r^2$$

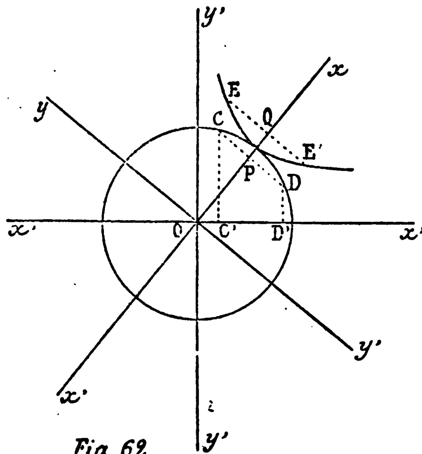


Fig. 62

on adopte pour nouveaux axes rectangulaires les droites $x_1x'_1$. $y_1y'_1$, dont la première fait avec $xx'$ l'angle $x_1\ ox = \alpha$. Dans l'équation résultante $F(x_1, y_1) = o$, l'abscisse $x_1$ n'est au fond qu'une fonction de $x$ et de $y$ déterminée par la relation

$$x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha.$$

En sorte que si l'on se donne $x = \mathrm{OP}$, par exemple, et qu'on mène les anciennes ordonnées PC, PD, ainsi que les perpendiculaires CC', DD', à $x_1x_1'$, les valeurs correspondantes de $x_1$ sont OC' et OD'. Tant que ces nouvelles abscisses sont réelles, il n'y a pas d'inconvénient à regarder $x_1$ comme une variable indépendante, et c'est là ce qu'on fait d'habitude. Mais qu'on suppose à $x$ une valeur OQ telle que les ordonnées correspondantes QE$i$, QE'$i$ soient imaginaires, et la question change de face, puisque la formule

$$x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

donnant alors pour $x_1$ des valeurs de la forme $\alpha + \beta i$, dans lesquelles $\alpha$ et $\beta$ ne sont pas arbitraires, on n'est plus en droit de regarder $x_1$ comme une variable entièrement indépendante. Mais ce qu'on vient de dire de $x_1$ s'applique également à la variable $x$ de l'équation

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

De là cette conclusion que, si les valeurs d'une variable indépendante sont parfaitement arbitraires tant qu'elles sont réelles, il ne saurait en être de même, en coordonnées rectilignes, quand ces valeurs sont mixtes. Aussi, l'étude des fonctions de variables imaginaires telles que les considère Cauchy, ne semble-t-elle être qu'un cas particulier de la recherche des propriétés des fonctions dans lesquelles les variables se remplacent par des fonctions linéaires d'autres variables.

Peut-être n'est-il pas inutile de montrer par un exemple combien on risque de se tromper lorsque, dans l'équation d'un lieu géométrique, on assigne à la variable indépendante une suite de valeurs arbitraires autres que des valeurs réelles.

Soit donc

$$y^2 = 2px$$

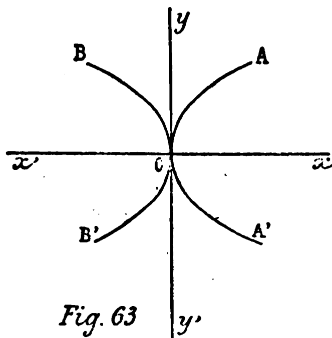


Fig. 63

l'équation d'un certain lieu. Les valeurs de $y$ qui vérifient cette équation sont réelles pour toute valeur réelle de $x$ de même signe que $p$ et donnent la parabole AOA'; elles sont imaginaires pour toute valeur réelle de $x$ de signe contraire à $p$ et donnent la parabole BOB'. Si l'on ne connaissait les propriétés de la parabole AOA', pour trouver chacune de ses autres conjuguées, on déterminerait, par exemple, les intersections successives du lieu avec une droite quelconque glissant parallèlement à elle-même. Mais on sait que ces conjuguées sont toutes des paraboles tangentes à la branche réelle, ayant pour diamètres les parallèles à $xx'$ passant par leur point de contact avec cette dernière, et pour cordes les

droites imaginaires conjuguées de ce diamètre; on en conclut que les abscisses correspondantes sont toutes de la forme $\alpha + \beta i$. Cependant, sur chacune des conjuguées de AOA', il existe deux points dont les abscisses sont purement imaginaires, ce sont les extrémités des cordes dont les centres réels sont situés sur $yy'$. Or, en assignant de prime-abord à la variable $x$ des valeurs de la forme $\beta i$, on eût obtenu le lieu de ces points qui se distingue des conjuguées de AOA' en ce que ses cordes ne sont plus parallèles.

La question de la distance de deux points vient immédiatement après celle des changements d'axes; elle n'offre pas plus de difficultés que cette dernière, pourvu qu'on entende, comme on l'a fait dans le chapitre précédent, par distance de deux points quelconques le rayon de la circonférence ayant pour centre l'un de ces points et passant par l'autre. C'est ainsi qu'en désignant par $d$ la distance des points considérés, par $x$, $y$, les coordonnées du premier et par $x'$, $y'$, celles du second, on a constamment la relation

$$d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

pour des axes rectangulaires, et la formule analogue connue pour des axes quelconques.

Je n'ai pas à m'étendre ici sur la détermination du centre, des diamètres, des tangentes, des asymptotes, etc., du lieu d'une équation algébrique ou transcendante à deux variables, et la raison en est que les considérations relatives à ces divers problèmes s'appliquent à des coordonnées imaginaires ou mixtes aussi bien qu'à des coordonnées réelles. Mais il est d'autres questions qui demandent plus de développements : ce sont la définition et la mesure des angles de modes quelconques, la généralisation des formules de la trigonométrie rectiligne, la détermination de l'aire réelle, imaginaire ou mixte comprise entre un arc de courbe, ses ordonnées extrêmes et l'axe des abscisses; enfin, les conséquences qui peuvent résulter de cette détermination pour l'étude des propriétés des intégrales définies. Comme toutes ces questions se rattachent plus ou moins directement à la mesure des aires planes de modes quelconques, j'insisterai particulièrement sur cette mesure.

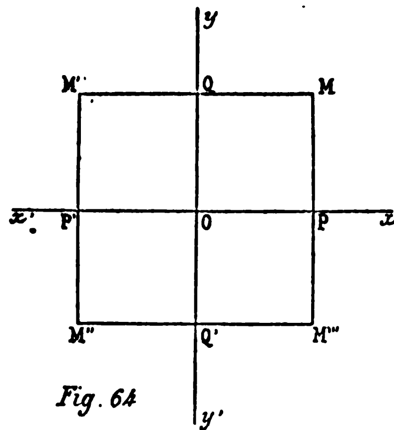


Fig. 64

Soient $xx'$, $yy'$, deux axes rectangulaires. Si l'on porte à partir de l'origine O les longueurs OP $=$ OP' $= a$, OQ $=$ OQ' $= b$, les premières sur l'axe des $x$, les secondes sur l'axe des $y$, et que par les points P, Q, P', Q', on mène à ces axes des parallèles qui se coupent mutuellement aux points M,M', M'', M''',on sait que les quatre rectangles ainsi formés autour du point O sont positifs ou négatifs en raison de leur situation par rapport aux axes. Ainsi, le premier de ces rectangles, OM, est positif comme ayant ses dimensions OP, OQ positives, et il en est de même de OM'' dont les dimensions sont négatives, tandis que OM' et OM''' qui ont leurs dimensions de sens contraires sont l'un et l'autre négatifs. Or, puisqu'on a déjà reconnu la nécessité de substituer aux aires absolues des aires positives ou négatives, n'est-il pas rationnel de chercher à concevoir des aires imaginaires ou mixtes ? Cette nouvelle conception est-elle possible, et, s'il en est ainsi, est-elle de nature à rendre d'utiles services ? Tels sont les deux points que je vais tâcher d'éclaircir.

La réponse à la première question est facile. En effet, rien n'empêche de prendre pour dimensions d'un rectangle les droites réelles ou imaginaires telles que je les ai définies.

Qu'on fasse glisser, par exemple la droite réelle OQ (*fig.* 64) parallèlement à $yy'$, de telle sorte que les composantes de son origine décrivent les composantes de même ordre de la droite réelle OP, et l'on obtiendra le rectangle OP formé de deux nappes superposées. De même, en faisant glisser OQ, toujours parallèlement à $yy'$, mais de manière à ce que les composantes de son origine décrivent, la première OP, la seconde, OP', on aura le rectangle O (M,M') formé de deux nappes adjacentes dont la première est OM. Enfin, si la droite imaginaire OQ$i$, tout en restant parallèle à $yy'$, glisse de façon que les composantes de son origined écrivent, la première, OP, la seconde, OP', elle engendrera le rectangle O (M,M''), formé de deux nappes symétriques, par rapport à l'origine O,

et dont la première est OM. Il est d'ailleurs évident que tous les autres rectangles ayant des dimensions réelles ou imaginaires se rattacheront à l'un de ces trois types.

Voyons maintenant si ces rectangles d'un nouveau genre sont, comme les droites, susceptibles de présenter deux modes contraires, et s'il est possible dans ce cas de concilier leur mesure avec les règles du calcul algébrique.

Rien ne s'oppose d'abord à ce qu'on regarde comme réels les rectangles OM, OM′, OM″, OM‴, formés chacun de deux nappes superposées et dont les dimensions sont réelles. Mais, parmi les autres rectangles groupés auteur de l'origine O, quels sont ceux qu'il faut assimiler à ces rectangles réels, et ceux qu'on doit regarder comme imaginaires. Ce n'est guère qu'en prenant l'analogie pour guide qu'on peut avoir chance de répondre à cette question.

On sait que les composantes d'une droite, tout en gardant la même direction ou des directions parallèles se séparent souvent l'une de l'autre. Pour juger alors du mode de la droite, il n'est pas de meilleur moyen que d'assigner à ces composantes, une origine réelle, et de voir si elles sont de nature à se superposer ou à rester symétriques. Or, les nappes OM, OM′, OM″..... se prêtent évidemment à une épreuve analogue pourvu qu'on les assujettisse à demeurer dans le plan des axes. Car en les faisant tourner toutes autour de l'origine, à l'exception d'une seule, on trouve que dès qu'elles ont une dimension commune avec cette dernière, elles coïncident avec elle ou lui sont symétriques. C'est ainsi qu'une demi-rotation autour de l'origine amène OM″, par exemple, en coïncidence avec OM, tandis que OM′, OM‴, restent en pareil cas symétriques de cette dernière nappe par rapport à l'un des axes.

Il semble d'après cela qu'on doive distinguer nettement les rectangles dont les nappes sont superposées ou superposables par rotation de ceux qui n'ont que des nappes symétriques. C'est ce que je vais faire en appelant les premiers rectangles réels, et les seconds, rectangles imaginaires. Mais pour que cette distinction soit fondée, il faut qu'on la trouve plus tard en harmonie avec les règles du calcul algébrique ; sinon force sera de la rejeter.

D'après les définitions précédentes, tout rectangle réel a ses dimen-

sions de même mode, et le contraire a lieu pour un rectangle imaginaire. D'où il suit que le mode d'un rectangle change avec celui d'une de ses dimensions. C'est ainsi qu'en remplaçant OP par OP*i*, on passe du rectangle réel OM au rectangle imaginaire O (M, M'); de même le changement de OQ en OQ*i* conduit du rectangle OM au rectangle imaginaire O (M,M'''), et l'on verra sans peine qu'en poursuivant de l'une ou l'autre façon on finit toujours par revenir au rectangle OM.

Il est naturel de prendre pour première composante d'un rectangle celle qui répond aux premières composantes de ses dimensions; et rien n'empêche qu'il en soit encore ainsi quand le rectangle vient à changer successivement de mode. Mais ce serait une erreur de croire qu'un rectangle doive toujours être positif ou négatif, en même temps que sa première composante, les rectangles réels à dimensions imaginaires présentent sous ce rapport une anomalie qu'il importe de signaler.

Considérons à cette effet le rectangle réel positif OM (*fig.* 64). Si l'on change deux fois de suite le mode de la dimension OP, on obtient successivement le rectangle imaginaire positif O (M,M') et le rectangle réel négatif OM'. De même, en changeant deux fois de suite le mode de la dimension OQ, on passe d'abord au rectangle imaginaire positif O (M,M'''), puis au rectangle réel négatif OM'''. Mais, si l'on change une fois seulement le mode de chacune des dimensions OP, OQ, on trouve le rectangle O (M,M'') dont la première composante, d'après ce qu'on a dit plus haut, ne saurait être que la nappe positive OM. Or, on admet sans difficulté qu'il revient au même de changer une fois le sens de chacune des dimensions d'un rectangle réel, ou deux fois de suite le sens de l'une d'elles. L'analogie conduit donc à admettre aussi qu'on peut indifféremment changer une fois le mode de chaque dimension d'un rectangle quelconque ou deux fois de suite le mode d'une même dimension. Dès lors, le rectangle O (M,M'') doit être assimilé à l'un des rectangles OM', OM'', c'est-à-dire qu'il est négatif comme eux. En d'autres termes, le rectangle O (M,M'') est de signe contraire à celui de sa première composante, et la même conclusion s'applique à tout rectangle réel dont les dimensions sont imaginaires.

Ces notions admises, la mesure du rectangle s'en déduit immédiatement dans toute sa généralité. Car, si l'on prend pour unité de surface

le carré construit sur la droite réelle et positive ayant pour composante l'unité de longueur, on voit de suite que l'aire d'un rectangle de mode quelconque est constamment égale au produit de ses deux dimensions. En sorte qu'on a, par exemple, d'après les notations adoptées plus haut

$$\text{OM} = ab$$
$$\text{O(M,M')} = abi$$
$$\text{O(M',M)} = -abi$$
$$\text{O(M,M'')} = -ab$$

etc.

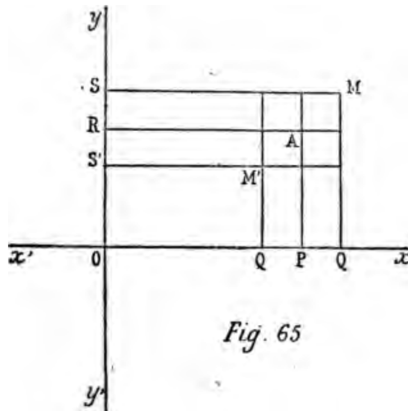


*Fig. 65*

A la vérité, je n'ai parlé jusqu'ici que des rectangles à dimensions réelles ou imaginaires. Mais si l'on prend sur les axes $xx'$, $yy'$, (*fig.* 65) les droites

$$x = \text{OP} + \text{PQ}i = a + \alpha i$$

$$y = \text{OR} + \text{RS}i = b + \beta i$$

puis, que par les points P, R, (Q,Q'), (S,S'), on mène à ces axes des parallèles qui se coupent respectivement aux points A, (M,M') et donnent par suite lieu aux rectangles

$$\text{OA} = ab$$
$$\text{A(S,S')} = a\beta i$$
$$\text{A(Q,Q')} = \alpha bi$$
$$\text{A(M,M')} = -\alpha\beta$$

il est rationnel de voir dans la somme de ces quatre rectangles un rectangle mixte ayant pour dimensions $x = a + \alpha i$, $y = b + \beta i$, et, comme on a évidemment

$$(a + \alpha i)\,(b + \beta i) = ab + \alpha bi + a\beta i - \alpha\beta$$

on en conclut que l'aire d'un pareil rectangle est encore égale au produit de ses deux dimensions.

pour l'autre. J'ajoute que la dénomination d'angles complémentaires ou supplémentaires ne cesse pas de convenir à deux angles quelconques dont la somme est égale à un ou deux angles droits. Il me reste à montrer que les formules trigonométriques s'étendent sans peine aux angles imaginaires.

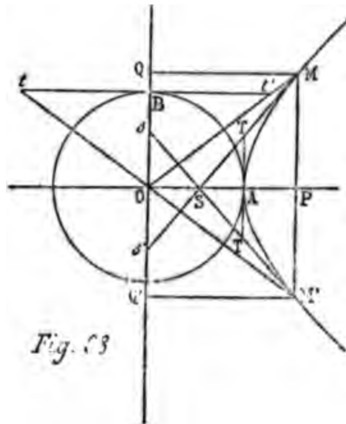


Fig. 63

Soit, par exemple, OA (M,M') $= \alpha i$ un secteur imaginaire de rayon réel OA$\sqrt{2}$. Si l'on mène l'ordonnée P (M,M') de (M,M') aussi bien que les tangentes A (T,T') et (M,M') S à l'origine et à l'extrémité de l'arc A (M,M'), on aura par définition

$$\text{Sin } \alpha i = \frac{\text{MP}i}{\text{OA}}$$

$$\text{Tang } \alpha i = \frac{\text{AT}i}{\text{OA}}$$

$$\text{Sec } \alpha i = \frac{\text{OS}}{\text{OA}}$$

De plus, en tirant la droite réelle OB perpendiculaire à OA, on verra que le secteur $\alpha i$ a pour complément BOA — OA (M,M') $= \frac{\pi}{2} - \alpha i$. D'où

$$\text{Cos } \alpha i = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha i\right)$$

$$\text{Cot } \alpha i = \text{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha i\right)$$

$$\text{Cosec } \alpha i = \text{Sec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha i\right)$$

Or, sin $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha i\right)$s'obtient en prenant le rapport au rayon de la perpendiculaire abaissée de (M,M') sur OB; et, comme cette perpendiculaire est la droite réelle (M,M') (Q,Q') = OP, on en conclut

$$\text{Cos}\ \alpha i = \frac{\text{OP}}{\text{OA}}$$

Je détermine maintenant l'intersection de la droite imaginaire O (M, M') avec la tangente en B à la circonférence; ce qui me donne le point $(t,t')$ et j'ai par suite

$$\text{Cot}\ \alpha i = \frac{\text{B}ti}{\text{OA}}$$

Enfin, comme la tangente en (M,M') à l'arc A (M,M') rencontre OB prolongé en $(s',s)$, on a évidemment

$$\text{Cosec}\ \alpha i = \frac{\text{O}s'i}{\text{OA}}$$

Il suit d'ailleurs immédiatement des définitions et constructions précédentes que

$$\text{Sin}^2\ \alpha i + \text{Cos}^2\ \alpha i = 1$$

$$\text{Tang}\ \alpha i = \frac{\text{Sin}\ \alpha i}{\text{Cos}\ \alpha i}$$

$$\text{Sec}\ \alpha i = \frac{1}{\text{Cos}\ \alpha i}$$

$$\text{Cot}\ \alpha i = \frac{\text{Cos}\ \alpha i}{\text{Sin}\ \alpha i}$$

$$\text{Cosec}\ \alpha i = \frac{1}{\text{Sin}\ \alpha i}$$

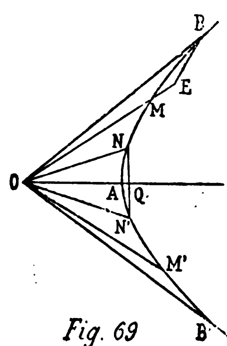


*Fig. 69*

Remarquons avant d'aller plus loin que si le secteur imaginaire OA (M,M') (*fig.* 69) augmente du secteur de même mode O (M,M') (B,B'), les lignes trigonométriques de ce dernier peuvent encore s'obtenir directement. En effet, soit OA (N,N') le secteur équivalant pris à partir du rayon OA: ce nouveau secteur a pour sinus $\frac{\text{NQ}i}{\text{OA}}$ et pour cosinus $\frac{\text{OQ}}{\text{OA}}$. Mais, si l'on mène la demi-corde EB conjugée

du diamètre OM, il est facile de démontrer que $\frac{EB}{OM}=\frac{NQ}{OA}$ et $\frac{OE}{OM}=\frac{OQ}{OA}$
On peut donc prendre $\frac{EBi}{OM}$ pour le sinus, et $\frac{OE}{OM}$ pour le cosinus du secteur O (M,M') (B,B'). Comme cette manière de procéder n'offre aucun inconvénient et qu'elle est de nature à simplifier les démonstrations, je l'adopterai dans ce qui va suivre.

Parmi les formules trigonométriques, les plus importantes assurément sont celles qui donnent le sinus et le cosinus de la somme de deux arcs en fonction des sinus et des cosinus de ces arcs. Je vais prouver qu'elles s'appliquent aux angles ou mieux aux secteurs imaginaires.

Considérons en premier lieu la somme

$$OAB + OB\,(C,C') = \alpha + \beta i$$

de deux secteurs de modes contraires (*fig.* 70) et proposons-nous de calculer sin $(\alpha+\beta i)$, cos $(\alpha+\beta i)$, connaissant

$$\text{Sin}\ \alpha = \frac{PB}{OA}$$

$$\text{Cos}\ \alpha = \frac{OP}{OA}$$

$$\text{Sin}\ \beta i = \frac{QCi}{OA}$$

$$\text{Cos}\ \beta i = \frac{OQ}{OA}$$


*Fig. 70*

Si l'on mène les perpendiculaires QS, (C,C') (M,M') à OA, puis, la parallèle (C,C') (R,R') à cette même droite, on a

$$\text{Sin}\ (\alpha+\beta i) = \frac{SQ + QRi}{OA}$$

$$\text{Cos}\ (\alpha+\beta i) = \frac{OS - MSi}{OA}$$

et il reste à calculer les valeurs de SQ, QR$i$, OS, MS$i$. Or, la similitude des triangles OBP, OQS donne

$$\frac{SQ}{PB}=\frac{OS}{OP}=\frac{OQ}{OB}$$

et l'on en conclut

$$\frac{SQ}{OA} = \frac{PB}{OA} \times \frac{OQ}{OB} = \text{Sin } \alpha \cos \beta i$$

$$\frac{OS}{OA} = \frac{OP}{OA} \times \frac{OQ}{OB} = \text{Cos } \alpha \cos \beta i$$

De même la similitude des triangles OBP, CQR, donne

$$\frac{QR}{OP} = \frac{MS}{PB} = \frac{QC}{OB}$$

d'où l'on tire

$$\frac{QRi}{OA} = \frac{QCi}{OA} \times \frac{OP}{OB} = \text{Sin } \beta i \cos \alpha$$

$$\frac{MSi}{OA} = \frac{PB}{OA} \times \frac{QCi}{OB} = \text{Sin } \alpha \sin \beta i$$

On a donc en définitive

$$\text{Sin } (\alpha + \beta i) = \sin \alpha \cos \beta i + \sin \beta i \cos \alpha$$
$$\text{Cos } (\alpha + \beta i) = \cos \alpha \cos \beta i - \sin \alpha \sin \beta i$$

c'est-à-dire les mêmes formules que pour des secteurs réels.

*Fig. 71*

S'agit-il maintenant, étant donnés les sinus et cosinus des secteurs imaginaires

$$\text{OA (B,B')} = \alpha i, \ \text{O (B,B') (C,C')} = \beta i$$

de calculer $\sin (\alpha + \beta)\, i$ et $\cos (\alpha + \beta)\, i$.

On mène, outre la droite BPB′ (*fig.* 71), la corde (C,C′) (Q,Q′) conjuguée du diamètre O (B,B′) et les données de la question sont

$$\text{Sin } \alpha i = \frac{PBi}{OA}$$

$$\text{Cos } \alpha i = \frac{OP}{OA}$$

$$\text{Sin } \beta i = \frac{QCi}{OB}$$

$$\text{Cos } \beta i = \frac{OQ}{OB}$$

Tirant les perpendiculaires CRC, QSQ' à l'axe OA et la parallèle (Q,Q') (D,D') à cet axe, on a évidemment

$$\text{Sin } (\alpha+\beta)\, i = \frac{SQi+DCi}{OA}$$

$$\text{Cos } (\alpha+\beta)\, i = \frac{OS+QD}{OA}$$

et il reste à calculer SQ,DC,OS et QD. Mais la similitude des triangles OBP,OSQ, donne

$$\frac{SQ}{PB} = \frac{OS}{OP} = \frac{OQ}{OB}$$

d'où l'on conclut.

$$\frac{QSi}{OA} = \frac{PBi}{OA} \times \frac{OQ}{OB} = \text{Sin } \alpha i \text{ Cos } \beta i$$

$$\frac{OS}{OA} = \frac{OP}{OA} \times \frac{QD}{OB} = \text{Cos } \alpha i \text{ Cos } \beta i$$

De plus, la similitude des triangles CQP,OBP, qui ont l'angle CQD = OBP, donne

$$\frac{DC}{OP} = \frac{QD}{PB} = \frac{QC}{OB}$$

d'où

$$\frac{DCi}{OP} = -\frac{QD}{PBi} = \frac{CQi}{OB}$$

et par suite

$$\frac{DCi}{OA} = \frac{CQi}{OB} \times \frac{OP}{OA} = \sin \beta i \cos \alpha i$$

$$\frac{QD}{OA} = -\frac{PBi}{OA} \times \frac{QCi}{OA} = -\sin \alpha i \sin \beta i$$

On a donc finalement

$$\text{Sin}\,(\alpha + \beta)\,i = \sin \alpha i \cos \beta i + \sin \beta i \cos \alpha i$$
$$\text{Cos}\,(\alpha + \beta)\,i = \cos \alpha i \cos \beta i - \sin \alpha i \sin \beta i$$

relations de même forme que les précédentes.

Pour traiter d'une manière complète la question des secteurs imaginaires, il faudrait encore parler de ceux qui résultent de l'intersection d'une circonférence de rayon imaginaire avec une droite quelconque, et montrer que ces nouveaux secteurs se plient comme les autres aux formules de la trigonométrie ; mais ces détails sortiraient du cadre que je me suis tracé. Je n'ai pas besoin non plus d'expliquer longuement comment s'exprime la projection de la distance de deux points quelconques sur un axe réel ; on voit assez par ce qui précède que cette projection a constamment pour mesure le produit de la distance considérée par le cosinus de l'angle que fait sa direction avec l'axe : en sorte que la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

par exemple, s'applique à tous les triangles possibles, quel que soit le mode de leurs sommets ou de leurs côtés. Il ne me reste plus pour terminer ce chapitre qu'à dire quelques mots de la fonction logarithmique et de la période de $\int \frac{dx}{x}$

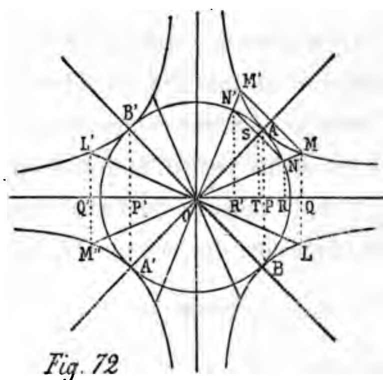


Fig. 72

Soit $xy = 1$ l'équation d'une hyperbole équilatère AA' (*fig.* 72) rapportée à ses asymptotes ; le demi-grand axe OA de la courbe est, comme on sait, égal à $\sqrt{2}$, et sa projetion OP sur l'axe des abscisses n'est autre que l'unité. De plus, le lieu de l'équation se compose de l'hyperbole AA' dont les coordonnées sont réelles, de l'hyperbole

conjuguée BB′ dont les coordonnées sont imaginaires, d'une circonférence et d'une infinité d'ellipses, courbes dont les coordonnées sont mixtes et qui toutes sont tangentes et concentriques aux deux hyperboles.

Si l'on regarde comme positif le secteur réel OAM compté à partir de l'axe OA, il existe entre l'aire $u$ de ce secteur et l'abscisse correspondante $OQ = x$ une relation remarquable.

En effet, l'abscisse OP étant égale à 1, si l'on prend les secteurs

$$o,\ u,\ 2u,\ 3u,\ 4u, \ldots\ nu,$$

en progression arithmétique, on prouve, même par des considérations élémentaires, que les abscisses correspondantes forment la progression géométrique.

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4, \ldots\ x_n.$$

Quant aux secteurs négatifs, tels que AOM′, ils offrent une relation du même genre avec les abscisses positives moindres que l'unité.

Les variables $u$ et $x$ étant de la sorte dans une dépendance mutuelle, il en résulte d'une part la fonction logarithmique

$$u = l.\,x$$

d'autre part la fonction exponentielle

$$x = e^u$$

le nombre $e$ étant égal à 2,1828...

Soit actuellement (N,N′) un point de la branche circulaire. Celle-ci a l'axe OA commun avec la branche réelle; en sorte que la corde S (N,N′) conjuguée de cet axe lui est perpendiculaire, et que OA (N,N′) est un secteur imaginaire qu'il convient d'ailleurs de regarder comme étant de même signe que le secteur réel OAM, c'est-à-dire positif. Si l'on désigne par $\theta$ le rapport de l'arc AN au rayon OA, la mesure de l'axe imaginaire A (N,N′) est $\theta i$; et telle est aussi la mesure du secteur OA(N,N′), puisque l'aire de ce dernier est

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\theta i\,\sqrt{2} = \theta i$$

De plus en menant le perpendiculaire ST à $xx'$ ainsi que l'ordonnée (N,N') (R,R') du point (N,N') on trouve pour l'abscisse de ce point

$$OT + TRi = \frac{OS}{\sqrt{2}} + \frac{SNi}{\sqrt{2}}$$
$$= \text{Cos}\ \theta + i \sin \theta$$

Mais, si l'on forme la progressive arithmétique

$$o,\ \theta i,\ 2\theta i,\ 3\theta i,\ 4\theta i,\ \ldots\ldots\ n\theta i$$

les abscisses correspondantes seront

$$1,\ \cos \theta + i \sin \theta,\ \cos 2\theta + i \sin 2\ \theta, \ldots\ldots \cos n\ \theta + i \sin n\theta$$

et comme ces abscisses sont en progression géométrique, on a le droit d'écrire

$$\theta i = l\ (\text{Cos}\ \theta + i \sin \theta)$$

et par suite

$$\text{Cos}\ \theta + i \sin \theta = e^{\theta i}$$

De là résultent d'utiles conséquences. En effet, si l'on conçoit un point imaginaire dont les composantes décrivent, la première, AB A'B', la seconde, AB' A'B, on voit que ce point finira par revenir en A, et qu'il en sera de même s'il décrit un multiple quelconque de la circonférence. Comme l'aire du cercle imaginaire OA est $2\pi i$; on en conclut d'abord que le logarithme de l'abscisse OP = 1 a non-seulement la valeur zéro, mais une infinité de valeurs imaginaires représentées par $o + 2K\pi i$, K désignant un nombre entier quelconque. On aura donc en premier lieu, pour employer la notation de Cauchy,

$$l\ ((1)) = o + 2\ K\pi i.$$

Par la même raison, le logarithme de l'abscisse OQ = $x$ sera

$$l\,((x)) = u + 2\,K\pi i$$

ou

$$l\,((x)) = u + l\,((1))$$

Observons maintenant que pour aller du point A au point A′ dont l'abscisse est OP′ = — 1, il faut parcourir une demi-circonférence imaginaire ou un multiple de cette demi-circonférence. D'où

$$l\,((-1)) = (2K+1)\,\pi i$$

K désignant toujours un nombre entier quelconque. Ainsi, tous les logarithmes de l'unité négative sont imaginaires. Qu'on ajoute ensuite au demi-cercle imaginaire AA′ le secteur réel et positif OA'M″ $=u$, en prenant OQ′ = — $x$ pour abscisse de M″ et l'on en concluera

$$\begin{aligned} l\,((-x)) &= u + (2K+1)\,\pi i \\ &= u + l\,((-1)). \end{aligned}$$

Considérons encore le point imaginaire (B,B′) dont l'abscisse est O (P,P′) $=i$; le secteur qui lui correspond est le quadrant imaginaire OA (B,B′)$=\frac{\pi i}{2}$, ou ce quadrant augmenté d'un multiple de $2\pi i$: et par suite

$$l\,((i)) = \left(2\,K + \frac{1}{2}\right)\pi i.$$

Enfin, si l'on ajoute au quadrant OA (B,B′) $= \frac{\pi i}{2}$, ou en général à $l\,((i))$, le secteur O (B,B′) (L,L′) qui est réel et positif comme ayant son rayon imaginaire et son arc imaginaire négatif; puis, qu'on désigne par $u$ l'aire de ce secteur et par $xi$ l'abscisse O(Q,Q′) du point (L,L′), on aura

$$l\,((xi)) = u + \left(2K + \frac{1}{2}\right)\pi i$$

$$= u + l\,((i)).$$

Ainsi, se trouvent démontrées d'une manière élémentaire des formules qui jusqu'à présent ne pouvaient l'être qu'avec le secours de la haute analyse, j'ajouterai qu'à la seule inspection de la figure on a

$$OT + TRi = e^{\theta i}$$

$$OT - TRi = e^{-\theta i}$$

et par suite.

$$OT = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}$$

$$TR = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2}$$

Mais on a vu que $OT = \cos\theta$ el $TR = \sin\theta$. Donc

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}, \ \operatorname{Sin}\theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2}.$$

C'est là, si je ne me trompe, la première démonstration géométrique rigoureuse qu'on ait donnée de ces formules importantes.

Les considérations qui précèdent permettent aussi de résoudre graphiquement l'équation binome.

Soit, par exemple, à trouver les racines de l'équation

$$x^3 + 1 = o.$$

La question se réduit évidemment à chercher les nombres ayant pour logarithme

$$\frac{1}{3}\, l((-1)) = \frac{2K+1}{3}\,\pi i.$$

Fig. 73

D'où il suit que les valeurs de $x$ sont les abscisses des secteurs imaginaires

$$\pi i, \ \frac{1}{3}\pi i, \ -\frac{1}{3}\pi i.$$

On a donc en premier lieu

$$x = OP' = -1$$

Pour obtenir les deux autres racines, je prends le tiers AC de la demi-circonférence ACA′, je mène la corde CEC′ perpendiculaire AA′, puis EE′ perpendiculaire à $xx'$, enfin l'ordonnée (C,C′) (D,D′) du point (C,C′), et comme j'ai OA (C,C′), $= \frac{\pi i}{3}$, OA (C′,C) $= -\frac{\pi i}{3}$, j'en conclus que les racines cherchées sont

$$x'' = \text{OE}' + \text{E}'\,\text{D}i$$
$$x''' = \text{OE}' + \text{E}'\,\text{D}'\,i$$

Mais, l'arc AC étant de 60°, j'ai

$$\text{OE}' = \frac{\text{OE}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{E}'\text{D} = \frac{\text{EC}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc, enfin,

$$x'' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$x''' = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Je n'ai rien dit encore de la détermination de l'aire comprise entre un arc quelconque de l'hyperbole équilatère, ses ordonnées extrêmes et l'axe des $x$: on peut cependant trouver aussi les logarithmes des nombres à l'aide de cette aire. Bien que la voie à suivre en pareil cas soit moins facile que la précédente, je vais l'indiquer rapidement d'abord comme application de la théorie des aires de modes quelconques et surtout parce que certains détails de la question ont soulevé de longs débats entre les mathématiciens.

On sait que l'aire du secteur réel OAM (*fig.* 72) est égale à celle du trapèze curviligne APQM déterminé par l'arc AM, ses ordonnées extrêmes AP, MQ, et la différence PQ $= x - x_1$, des abscisses correspondantes. Ce trapèze ayant pour expression

$$\int_{x_1}^{x} \frac{dx}{x}$$

on a donc

$$\int_{x_1}^{x} \frac{dx}{x} = lx$$

Cette même propriété subsiste pour l'aire comprise entre l'ordonnée (N,N') (R,R') du point (N,N') de la branche circulaire, l'ordonnée AP, l'arc A (N,N') et l'axe des abscisses. En effet, d'après les notations précédemment admises, l'arc absolu AN étant égal à $\theta$, on a pour l'abscisse du point (N,N')

$$x = \text{Cos}\,\theta + i \sin\theta$$

La différentielle de l'aire en question est donc

$$\frac{dx}{x} = \frac{-\sin\theta + i\cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta i}\, d\theta = i\, d\theta$$

Par suite, cette aire est $\theta i$, et l'on a bien encore

$$\int_{x_1}^{x} \frac{dx}{x} = l\, x$$

Au reste, dès qu'on peut juger du mode de l'aire ANRR'N' par celui de sa différentielle, il est inutile d'intégrer pour en conclure la valeur de cette aire. En effet, à ne considérer que des surfaces absolues, le triangle ONN' est équivalent au trapèze NRR'N' puisque l'un a pour mesure

$$\text{OS} \times \text{SN} = \sqrt{2} \cos\theta \sqrt{2} \sin\theta$$

et l'autre

$$\text{ST} \times \text{RR}' = \cos\theta \times 2 \sin\theta$$

Ajoutant de part et d'autre le segment NAN' on a donc

$$\text{ONAN}' = \text{ANRR}'\text{N}'$$

et de là résulte l'équivalence du secteur OA (N,N') $= \theta i$ et du trapèze imaginaire ANRR'N'. Seulement dans le passage de la première surface à la seconde, les deux nappes OAN, OAN', ne restent pas distinctes.

Tant qu'on n'a su traduire en coordonnées rectilignes que les solutions réelles de l'équation $xy = 1$, les symboles $\int \frac{dx}{x}$ et $lx$ n'ont pu représenter que l'aire AMQP répondant à l'abscisse OQ $= x$; mais la construction de branches imaginaires, bien caractérisées, formant avec la branche réelle un seul et même lieu, permet évidemment de donner à la signification géométrique de ces deux symboles toute l'extension désirable. C'est ainsi qu'en désignant l'abscisse OP par $x_1$ et par $u$ chacune des aires égales AMQB, A'M''Q'P', répondant l'une à OQ $= x$ l'autre à OQ' $= - x$, on est en droit d'écrire

$$\int_{x_1}^{x} \frac{dx}{x} = u + 2K\pi i$$

$$\int_{x_1}^{-x} \frac{dx}{x} = u + (2K + 1)\pi i$$

etc.

La question des logarithmes des nombres négatifs fit naître, comme on sait, de longues discussions entre Leibnitz et Bernouilli. Leibnitz voulait que de pareils logarithmes fussent imaginaires. Bernouilli soutenait au contraire qu'ils sont les mêmes que ceux des nombres positifs correspondants: la principale raison qu'il alléguait à l'appui de sa thèse, c'est que l'aire A'M''Q'P' répondant à l'abscisse OP' $= - x$ (*fig.*72) est positive comme ayant ses coordonnées de même signe, et qu'elle est par conséquent égale à l'aire AMPQ où à $l. x$. Le différent était loin d'être terminé, lorsque, par des considérations purement analytiques, Euler parvint à démontrer que les logarithmes des nombres négatifs sont tous imaginaires, et qu'en outre les nombres positifs ont une infinité de logarithmes de cette espèce. Mais ces nouvelles raisons ne battaient pas en brèche l'objection géométrique mentionnée plus haut; elles ne laissèrent donc pas que de rencontrer encore quelques contradicteurs, par-

mi lesquels il faut citer d'Alembert, qui se rangea résolument du côté de Bernouilli. Cauchy reconnut plus tard, au moyen des quantités complexes, que $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ qui n'a pas de signification pour des valeurs réelles de $x$, représente, dès qu'on assigne à cette variable des valeurs imaginaires, tous les chemins qui vont, sans passer par l'origine, du point — 1 au point + 1, et, en particulier, la demi-circonférence ayant l'unité pour rayon. Cette belle interprétation géométrique avait néanmoins l'inconvénient de n'offrir aucune analogie avec la construction des logarithmes ordinaires. Enfin, dans ces derniers temps, M. Marie a eu l'idée d'assimiler la période de $\int_{x_1}^{x} \frac{dx}{x}$ à l'aire du cercle conjugué de l'hyperbole équilatère. Mais ce n'est là qu'un rapprochement entre des aires réelles, puisque le cercle n'est imaginaire que de nom, et ne se rattache par aucun lien géométrique à l'hyperbole. M. Marie, n'interprète donc en définitive les valeurs de la fonction logarithmique que par une suite de courbes distinctes, indépendantes les unes des autres, et non, comme il semble le croire, par un seul et même lieu. Aussi, ses conclusions sont-elles loin d'avoir toute la rigueur désirable. La solution que je propose à mon tour n'étant pas moins simple que les précédentes et n'offrant aucun des inconvénients que je viens de signaler, sera peut-être favorablement accueillie.

Je m'étais proposé de montrer par quelques exemples choisis les avantages que présente en géométrie comme en algèbre l'emploi des grandeurs de modes quelconques, telles que je les ai définies; je crois m'être acquitté de ma tâche. Il me resterait bien sans doute à faire voir quels services ces mêmes grandeurs peuvent rendre en coordonnées polaires comme en coordonnées rectilignes à trois dimensions. Mais ces applications nouvelles qui découlent naturellement de celles que je n'ai fait qu'indiquer brièvement, m'entraîneraient trop loin. Je ne m'étendrai donc pas d'avantage sur ce sujet.

---

# CONCLUSION

Les caractères que j'assigne aux points imaginaires comme aux points réels permettent :

1° De construire entièrement toutes les figures de la géométrie supérieure, de relier cette branche des mathématiques à l'analyse ancienne, et de donner au principe de la corrélation des figures toute l'extension qu'il comporte ;

2° De compléter le système de coordonnées de Descartes par la construction des diverses branches ou nappes du lieu d'une équation à deux ou trois variables ;

3° De généraliser les formules trigonométriques et d'étudier par de nouveaux procédés les propriétés des fonctions.

Je rappelle d'ailleurs que malgré leur généralité, les résultats auxquels j'arrive n'amènent aucune complication dans la science; que, sans être en désaccord avec les travaux de M. Chasles, ils contribuent puissamment à la clarté des démonstrations de la Géométrie supérieure, et qu'ils viennent confirmer de la manière la plus rigoureuse les prévisions de Monge, de Carnot, de Poncelet, aussi bien que les recherches de M. Marie.

Enfin, j'ai commencé par montrer, conformément aux vues de Descartes, que l'emploi des droites réelles, imaginaires ou mixtes suffit pour légitimer les règles du calcul numérique ou littéral, affranchir l'algèbre des êtres de raison qui la déparent, et compléter la résolution graphique des équations de degré quelconque..

Ce sont là, si je ne me trompe, des faits qui doivent militer en faveur de l'innovation que je propose, ou du moins lui constituer des droits sérieux à l'examen. Au reste, n'eut-il fait qu'appeler de nouveau l'attention sur de graves problèmes et combattre à leur endroit des préventions mal fondées, ce livre aurait encore son utilité. Car, s'il est des objets de recherches que la raison condamne sans appel, il en est d'autres qui ne sont tombés dans le discrédit que pour avoir longtemps déjoué tous les efforts humains. Mais combien n'a-t-on pas vu de ces obstacles réputés insurmontables arrêter même pendant des siècles le cours paisible du progrès pour céder enfin à son irrésistible puissance ?

Gardons-nous donc ici d'oublier cette belle maxime d'Aristote, que Roger Bacon nous renvoie comme un écho des âges lointains : « *Nombre de choses sont encore ignorées des savants qui seront familières aux écoliers des temps à venir !* »

FIN.

# TABLE

## PREMIÈRE PARTIE

### TRAVAUX DE DESCARTES.



## DEUXIÈME PARTIE

### DÉFINITIONS D'ARITHMÉTIQUE ET D'ALGÈBRE.

CHAPITRE II

APPLICATIONS ALGÉBRIQUES.



26. — Tours. — Imp. Rouillé-Ladevèze, rue Chaude, 6.

